Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Streicher
Dr. Sergiy Nesenenko
Pavol Safarik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2010
25.–29. Mai

6. Übungsblatt zur „Mathematik II für Inf, WInf“

Gruppenübung

Aufgabe G20 (Standardskalarprodukt)

Sei $v, e \in \mathbb{R}^2$ und es gelte $\|e\| = 1$. Weiter sei $a := \langle v, e\rangle e$ und $b := v - a$.
Zeige, dass a und b orthogonal sind, und fertige eine Skizze an. Welche geometrische Bedeutung hat das Skalarprodukt $\langle v, e\rangle$?

Aufgabe G21 (Orthonormalbasen)

Zeige, dass die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad v_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

eine orthonormierte Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden. Stell den Vektor

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

als Linearkombination dieser Basisvektoren dar.

Aufgabe G22 (Orthonormalisierungsverfahren nach Gram-Schmidt)

Gegeben seien die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Konstruiere eine Orthonormalbasis der linearen Hülle $\mathrm{lin}(b_1, b_2, b_3)$.

(b) Zeige, dass der Vektor $v = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{9}{2} \end{pmatrix}^T$ in der lineare Hülle $\mathrm{lin}(b_1, b_2, b_3)$ liegt und stelle ihn als Linearkombination der in Teil (a) konstruierten Basis dar.

Aufgabe G23 (Definitheit)

Untersuche, ob die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

positiv definit, negativ definit, indefinit oder keins von dreien sind.

Tipp: Für Matrizen $M \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}$ der Gestalt

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und $C \in \mathbb{R}^{m\times m}$ gilt, dass die Menge der Eigenwerte von M gerade die Vereinigung der Eigenwerte von A und C ist (siehe Aufgabe H16).

Hausübung

Aufgabe H22 (Orthonormale Mengen) (2 Punkte)

Sei S eine orthonormale Teilmenge von $\mathbb{C}^n$. Zeige, dass S linear unabhängig ist.

Aufgabe H23 (Orthonormalisierungsverfahren nach Gram-Schmidt) (2 Punkte)

Führe das Orthonormalisierungsverfahren nach Gram-Schmidt mit den Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \ b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

aus.

Welches Problem tritt dabei auf und was ist dessen Ursache?

Modifiziere das Orthonormalisierungsverfahren so, dass es auch für die Vektoren b_1, b_2, b_3 eine Orthonormalbasis von $\operatorname{lin}(b_1, b_2, b_3)$ liefert.

Aufgabe H24 (Orthogonale Matrizen) (2 Punkte)

(a) Sei $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeige, dass die folgenden zwei Aussagen äquivalent sind:

   i. Die Spalten von Q bilden ein Orthonormalsystem.

   ii. Die Matrix Q ist orthogonal.

(b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal. Zeige, dass die durch A definierte lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : x \mapsto Ax$$

Längen und Winkel erhält, das heißt es gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\| = \|Ax\| \quad \text{und} \quad \langle x \mid y \rangle = \langle Ax \mid Ay \rangle.$$