Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Thomas Streicher
Dr. Sergiy Nesenenko
Dipl.-Math. Pavol Safarik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

13-18.05.2010

Mathematik II für Inf und WInf

5. Übung

Gruppenübung

G 17 (Lineares Gleichungssystem)
Überprüfen Sie, ob die folgenden linearen Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} x_1 \phantom{{}+2x_2} + 2x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

lösbar sind. Bestimmen Sie jeweils die Dimension des Lösungsraums und geben Sie den Lösungsraum an.

G 18 (Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen)
Wir betrachten die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Bestimme eine Basis des Kerns von A und Rang(A).

b) Untersuche, ob die linearen Gleichungssysteme $Ax = b_i$, $i = 1, 2$, lösbar sind, wobei

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Bestimme alle $b \in \mathbb{R}^3$ für die das LGS $Ax = b$ eine Lösung besitzt. (Dazu muss man jetzt nicht mehr rechnen!)

G 19 (Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren)

a) Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

b) Die Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(x) = Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\sqrt{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{4}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\sqrt{2} & \frac{1}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ist eine Drehung um eine Achse. Bestimme die Richtung der Drehachse und den Drehwinkel.

Hausübung

H 18 (Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen)
Für welche Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & \lambda x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & (\lambda-1)x_2 & - & 2x_3 & = & 2 \end{array}$$

(a) keine,

(b) genau eine,

(c) mehrere Lösungen?

Bestimmen Sie gegebenenfalls alle Lösungen!

H 19 Bestimme die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & \alpha^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit vom reellen Parameter α.

Hinweis: Es sind drei verschiedene Fälle in Abhängigkeit vom Wert von α zu unterscheiden. Bei einem der Fälle ist die Formel $\alpha^2 - 1 = (\alpha+1)(\alpha-1)$ (3. binomische Formel) hilfreich.

Empfehlung: Benutze den Gaußalgorithmus.

H 20 (Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen)

a) Zeigen Sie, dass sich die charakteristische Gleichung einer 2×2-Matrix A als

$$\lambda^2 - \lambda \operatorname{tr}(A) + \det(A) = 0$$

schreiben lässt.

b) Bestimmen Sie die Lösungen der charakteristischen Gleichung für eine reellwertige Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Für welche $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ besitzt die Matrix A keine, ein oder zwei reelle Eigenwerte?

c) Zeigen Sie, dass $\begin{pmatrix} -b \\ a-\lambda_1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -b \\ a-\lambda_2 \end{pmatrix}$ Eigenvektoren von A sind für den Fall, dass A reelle Eigenwerte hat.

d) Berechnen Sie für $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ mit $a + b = c + d$ die Eigenwerte von A und zeigen Sie, dass sie ganzzahlig sind.

H 21 (Eigenwerte und Eigenvektoren von transponierten Matrizen)

a) Sei A eine quadratische Matrix über $\mathbb{R}$. Beweisen oder widerlegen Sie, dass A und A^T die gleichen Eigenwerte haben.

b) Beweisen oder widerlegen Sie, dass A und A^T die gleichen Eigenräume haben.