Algebraische Zahlentheorie
8. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. H. Bruinier
Dipl.-Math. E. Hofmann

SS 2010
23. Juni 2010

Gruppenübung

Aufgabe G1

Sei $K=\mathbb{Q}$ und $L=\mathbb{Q}(\zeta_5)$ der fünfte Kreisteilungskörper, mit ζ_5 einer primitiven 5ten Einheitswurzel. Für den Ganzheitsring $\mathcal{O}_L = L\cap\Omega$ gilt $\mathcal{O}_L=\mathbb{Z}[\zeta_5]$ (vergleiche Blatt 4).
Untersuchen Sie das Zerlegungsverhalten der Primzahlen 2, 3, 5 und 7. Bestimmen Sie die Primideale von $\mathcal{O}_L$, welche über diesen Primzahlen liegen.

Aufgabe G2

Es seien $K\subset L$ Zahlkörper und $\mathcal{O}_K\subset\mathcal{O}_L$ deren Ganzheitsringe.
Zeigen Sie: Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ Ideale von $\mathcal{O}_K$, so gilt $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}\mathcal{O}_L\cap\mathcal{O}_K$ und $\mathfrak{a}\mid\mathfrak{b}\Longleftrightarrow\mathfrak{a}\mathcal{O}_L\mid\mathfrak{b}\mathcal{O}_L$.

Aufgabe G3

Seien K, $\mathcal{O}_K$ und L, $\mathcal{O}_L$ wie in Aufgabe G2.
Beweisen Sie: Zu jedem ganzen Ideal $\mathfrak{A}$ von $\mathcal{O}_L$ gibt es ein $\theta\in\mathcal{O}_L$ mit zu $\mathfrak{A}$ teilerfremdem Führer $\mathfrak{F}=\{\alpha\in\mathcal{O}_L\ ;\ \alpha\mathcal{O}_L\subseteq\mathcal{O}_K[\theta]\}$, so dass $L=K[\theta]$.