Algebraische Zahlentheorie
7. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. H. Bruinier
Dipl.-Math. E. Hofmann

SS 2010
16. Juni 2010

Gruppenübung

Aufgabe G1
Zeigen Sie: Für die beiden Zahlkörper $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ und $K = \mathbb{Q}(\sqrt{10})$ ist jeweils $h_K = 2$.
Vorgehensweise: Bestimmen Sie zunächst die Primideale, welche über den Primteilern der Diskriminante liegen. Untersuchen Sie diese sowie die triviale Idealklasse jeweils auf Äquivalenz bzw. Inäquivalenz. (*Hinweis:* Norm!)

Aufgabe G2
Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ ein quadratischer Zahlkörper, wobei $d \neq 0, 1$ quadratfrei. Die Diskriminante D von K besitze eine Faktorisierung $D = D_1 \cdot D_2$, wobei D_1 und D_2 ebenfalls Diskriminanten von quadratischen Zahlkörpern sind. Dann ist die Klassenzahl $h_K \geq 2$. Es genügt, wenn Sie den Fall $d \equiv 2, 3 \mod 4$ zeigen.
Hinweis: Verallgemeinern Sie das Vorgehen von Aufgabe G1.

Aufgabe G3

(a) Sei K ein Zahlkörper und $\mathfrak{a}$ ein Ideal von $\mathcal{O}_K = \Omega \cap K$. Zeigen Sie: Es gibt eine endliche Erweiterung L von K in welcher $\mathfrak{a}$ zu einem Hauptideal wird, d.h. $\mathfrak{a}\mathcal{O}_L$ ist ein Hauptideal, wobei wie üblich $\mathcal{O}_L = \Omega \cap L$.

Hinweis: Es gibt ein m, so dass $\mathfrak{a}^m$ ein Hauptideal in $\mathcal{O}_K$ ist; also $\mathfrak{a}^m = \alpha\mathcal{O}_K$. Adjungieren Sie eine m-te Wurzel von α.

(b) Zeigen Sie nun, dass es eine *endliche* Erweiterung von K gibt, in welcher jedes Ideal von K zum Hauptideal wird.

Aufgabe G4

(a) Ermitteln Sie die Struktur von $\mathcal{O}_K^\times$ für den fünften Kreisteilungskörper $K = \mathbb{Q}(\zeta_5)$. Bestimmen Sie nicht-triviale Einheiten.

Hinweis: Betrachen Sie das Minimalpolynom $p(X)$ der primitiven 5ten Einheitswurzel ζ_5 und setzen Sie einen geeigneten Wert für X ein.

(b) Ermitteln Sie die Struktur von $\mathcal{O}_K^\times$ für $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. Bestimmen Sie auch hier nicht-triviale Einheiten.