Algebraische Zahlentheorie
6. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. H. Bruinier
Dipl.-Math. E. Hofmann

SS 2010
2. Juni 2010

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Variante des Gitterpunktsatzes)
Sei Γ ein vollständiges Gitter, und vol(Γ) das Volumen einer Grundmasche von Γ. Weiter seien $U_1, \ldots, U_m$ messbare Menge in V mit $\sum_{i=1}^m \operatorname{vol} U_i > \operatorname{vol} \Gamma$. Zeigen Sie: Es gibt dann indizes i,j und Gitterpunkte $x,y \in \Gamma$ mit $(i,x) \neq (j,y)$, so dass gilt

$$\big(U_i + x\big) \cap \big(U_j + y\big) \neq \emptyset.$$

Hinweis: Nehmen Sie an, es gilt stets $(U_i + x) \cap (U_j + y) = \emptyset$ für alle $(i,x) \neq (j,y)$. Überlegen Sie zunächst, dass die U_i disjunkt sind. Sei nun $U = \cup_{i=1}^m U_i$ und Φ eine Fundamentalmasche; berechnen Sie $\operatorname{vol} U$, betrachten Sie dabei ein Zerlegung $U = \cup_{x\in\Gamma}\big(U \cap (\Phi + x)\big)$.

Aufgabe G2 (Vier-Quadrate Satz)
Der vier Quadrate Satz von Laplace lautet: Jede natürlich Zahl m lässt sich als Summe von vier Quadraten darstellen.
Der folgende Beweis geht auf Davenport zurück.

(a) Zeigen Sie zunächst, dass die Menge der Zahlen, welche sich als Summe von vier Quadraten darstellen lassen, multiplikativ abgeschlossen ist. Betrachten Sie hierzu für ganze Zahlen x,y,u und v Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}(2\times 2, \mathbb{C}), \quad \text{wobei} \quad z = x + iy,\, w = u + i\mathrm{v}.$$

(b) Sei nun p ein Primzahl ungleich 2. Zeigen Sie, dass es ganze Zahlen a, b gibt mit $a^2+b^2+1 \equiv 0 \mod p$. Hinweis: Betrachten Sie die Restklassen $a^2 + p\mathbb{Z}$ für $0 \leq a \leq \frac{1}{2}(p-1)$ und $-b^2 - 1 + p\mathbb{Z}$ mit $0 \leq b \leq \frac{1}{2}(p-1)$.

(c) Man definiert nun Homomorphismen λ, $\mu : \mathbb{Z}^4 \to \mathbb{Z}$,

$$\lambda(x) = x_1 - ax_3 - bx_4,$$
$$\mu(x) = x_2 - bx_3 + ax_4,$$

sowie $\phi : \mathbb{Z}^4 \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $x \mapsto (\lambda(x) + p\mathbb{Z}, \mu(x) + p\mathbb{Z})$ und setzt $\Gamma := \operatorname{Ker} \phi$.
Weisen Sie nach: Γ ist ein vollständiges Gitter (im $\mathbb{R}^4$) und für $x \in \Gamma$ gilt

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \equiv 0 \mod p.$$

(d) Wenden Sie nun den Minkowskischen Gitterpuntksatz an, um zu zeigen, dass sich p als Summe von vier Quadraten darstellen lässt.
Hinweise: Es gilt $\mathrm{vol}(\Gamma) \leq p^2$ (da $[\mathbb{Z}^4 : \Gamma] \leq p^2$ (Homomorphiesatz!)). Das Volumen einer Kugel mit Radius r im $\mathbb{R}^4$ ist $\frac{1}{2}r^4\pi^2$.

Aufgabe G3 (Pellsche Gleichung)
Sei $D > 1$ eine quadratfreie ganze Zahl und d die Diskriminante des reell-quadratischen Zahlkörpers $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$. (Zur Erinnerung: $d = D$, falls $D \equiv 1 \mod 4$ und $d = 4D$, falls $D \equiv 2, 3 \mod 4$). Die Doppelgleichung

$$x^2 - dy^2 = \pm 4$$

heißt *Pellsche Gleichung*. Wenn die Gleichung $x^2 - dy^2 = -4$ eine Lösung in ganzen Zahlen besitzt, so sei x_1, y_1 die Lösung mit x_1, $y_1 > 0$ und y_1 kleinstmöglich. Ansonsten sei x_1, y_1 diejenige ganzzahlige Lösung von $x^2 - dy^2 = +4$, für die ebenfalls x_1,$y_1 > 0$ und y_1 minimal ist. Zeigen Sie:

$$\varepsilon_1 = \frac{x_1 + y_1\sqrt{d}}{2}$$

ist eine Fundamentaleinheit von K.

NUR NOCH FÜR KURZE ZEIT ...