Algebraische Zahlentheorie
5. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. H. Bruinier
Dipl.-Math. E. Hofmann

SS 2010
26. Mai 2010

Gruppenübung

Aufgabe G1
Beweisen Sie: Zu jedem ganzen Ideal $\mathfrak{a}$ in einem Dedekindring $\mathcal{O}$ gibt es ein ein ganzes Ideal $\mathfrak{b}$, solcher Art, dass das Produkt $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ eine Hauptideal ist.
Vorgehensweise:

- Für ein Element $\alpha \neq 0$ aus $\mathfrak{a}$ setzt man $\mathfrak{b} = \{\beta \in \mathcal{O}\,;\ \beta\mathfrak{a} \subseteq (\alpha)\}$.
- Betrachte $\mathfrak{A} = \alpha^{-1}\mathfrak{a}\mathfrak{b}$. Man überlegt sich leicht, dass dies ein (ganzes) Ideal in $\mathcal{O}$ ist.
- Um zu zeigen, dass $\mathfrak{A} = \mathcal{O}$ ist, betrachte $\gamma \in \mathfrak{A}^{-1}$ und führe die Annahme $\gamma \notin \mathcal{O}$ zu einem Widerspruch. (Hinweis: $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{A}$. Man folgere $\gamma\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{b}$.)

Aufgabe G2
Es sei $\mathcal{O}$ ein Dedekindring. Zeigen Sie: Ist $\mathcal{O}$ faktoriell, so ist $\mathcal{O}$ auch ein Hauptidealring.
Hinweise:

- Sei $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}$ ein (beliebiges) ganzes Ideal; nach Aufgabe G1 hat man $\mathfrak{a} \mid (\alpha)$, mit $\alpha \in \mathfrak{a}$, $\alpha \neq 0$. Betrachten Sie die Primfaktorzerlegung von α.
- Zeigen Sie, dass Primelement von $\mathcal{O}$ prime Hauptideale erzeugen.

Aufgabe G3
Sei $K \mid \mathbb{Q}$ ein Zahlkörper und J_K die Gruppe der gebrochenen Ideale. Zeigen Sie, dass J_K isomoph ist zur durch die maximalen Ideale von $\mathcal{O}_K$ frei erzeugten abelschen Gruppe.

Aufgabe G4
Man zeige, dass die Schranke im Minkowskischen Gitterpunktsatz nicht verbessert werden kann, indem man für jedes $n = \dim(V)$ ein vollständiges Gitter Γ und eine konvexe, symmetrische Menge $X \subseteq V$ angibt, mit $\mathrm{vol}(X) = 2^n \,\mathrm{vol}(\Gamma)$, die keinen von Null verschiedenen Punkt aus Γ enthält.

Bemerkung. *Setzt man allerdings im Minkowskischen Gitterpunktsatz voraus, dass X nicht nur zentralsymmetrisch und konvex sondern auch* kompakt *ist, so genügt sogar*

$$\mathrm{vol}(X) = 2^n \,\mathrm{vol}(\Gamma),$$

damit X midestens einen Punkt $\neq 0$ aus Γ enthält.

Aufgabe G5 (*)

Zeigen Sie, dass die quadratischen Zahlköper mit der Diskriminante 5, 8, 11, −3, −4, −7, −8, −11 alle die Klassenzahl 1 haben.

Zur Vorgehensweise:

Tatsächlich erfordert diese Aufgabe, jeden Fall einzeln zu behandeln. Es genügt zum Beispiel, wenn man zeigen kann, dass der betreffende Zahlkörper euklidisch ist. Im Allgemeinen wird man jedoch explizit versuchen müssen, alle möglichen Idealklassen anzugeben. Bekanntlich enthält jede Idealklasse $\mathfrak{A} \in Cl_K$ ein Ideal $\mathfrak{a}$ mit

$$N(\mathfrak{a}) \leq \left(\frac{2}{\pi}\right)^s \sqrt{|\mathrm{d}_K|}. \qquad (*)$$

Zu jedem Primideal $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{a}$ gibt es eine Primzahl $p \in \mathbb{Z}$ mit $\mathbb{Z} \cap \mathfrak{p}\mathcal{O}_K = p\mathbb{Z}$ (man sagt $\mathfrak{p}$ *liegt über* p); es gilt dann $p \mid N(\mathfrak{a})$. Wegen (*) kommen nur einige wenige p in Frage. Gelingt es nun nachzuweisen, dass es kein Primideal gibt, welches über einem solchen p liegt und der Abschätzung (*) genügt, oder, dass jedes derartige Primideal ein Hauptideal ist, ist man fertig.