Algebraische Zahlentheorie
3. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. H. Bruinier
Dipl.-Math. E. Hofmann

SS 2010
12. Mai 2010

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Zahlkörper vom Grad 2)

(a) Zeigen Sie, dass jeder Zahlkörper vom Grad 2 über $\mathbb{Q}$ einer der quadratischen Zahlkörper $\mathbb{Q}[\sqrt{m}]$ ist, mit $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0,1\}$ und m quadratfrei.

(b) Zeigen Sie: Die Zahlkörper $\mathbb{Q}[\sqrt{m}]$ sind für *quadratfreie* ganze Zahlen paarweise nicht isomorph. (Hinweis: Betrachten Sie die Gleichung $\sqrt{m} = a + b\sqrt{n}$.)

Aufgabe G2

Sei $\mathfrak{I}$ das von 2 und $1+\sqrt{-3}$ erzeugte Ideal in dem Ring

$$\mathbb{Z}\left[\sqrt{-3}\,\right] = \left\{a + b\sqrt{-3}\;;\; a, b \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Zeigen sie, dass $\mathfrak{I}$ nicht gleich dem von 2 erzeugten Hauptideal (2), ist, dass aber $\mathfrak{I}^2 = 2\mathfrak{I}$ gilt.
Folgern Sie hieraus: Ideale in $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-3}\,\right]$ lassen sich nicht eindeutig in Primideale zerlegen.
Zeigen Sie weiter, dass $\mathfrak{I}$ das einzige Primideal ist, welches das Hauptideal (2) enthält. Folgern Sie, dass (2) sich nicht als Produkt von Primidealen darstellen lässt.
Hinweise: Es kann hilfreich sein, den Ring als $\mathbb{Z}$-Modul mit der Basis 1, $1+\sqrt{3}$ zu schreiben.
Zum Nachweis der Primidealeigenschaft von $\mathfrak{I}$: Betrachten Sie Kongruenzen modulo 2 (in $\mathbb{Z}$).

Aufgabe G3

Sei p eine ungerade Primzahl, ω eine primitive p-te Einheitswurzel, $\omega = e^{2\pi i/p}$. In dieser Aufgabe soll ein Ausdruck für die Diskriminante $\mathrm{d}(1, \omega, \ldots, \omega^{p-2})$ bestimmt werden.
Hinweise:

- ω ist ein primitives Element für die Körpererweiterung $L = \mathbb{Q}[\omega]$ über $\mathbb{Q}$.
- Benutzen Sie die Identität $x^p - 1 = (x-1)f(x)$, wobei $f(x)$ das primitive $p$te Kreisteilungspolynom ist.
- Aufgabe G2 vom ersten Übungsblatt kann nützlich sein, etwa um $N(1-\omega)$ zu bestimmen.

Aufgabe G4

In dieser Aufgabe seien p und ω wie in Aufgabe G3.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}[\omega]$ eine Wurzel $\sqrt{p}$ enthällt, falls $p \equiv 1 \mod 4$ und eine Wurzel $\sqrt{-p}$, falls $p \equiv -1 \mod 4$. (Hinweis: G3.)
Schreiben Sie $\sqrt{-3}$ und $\sqrt{5}$ als Polynome in $\omega = e^{2\pi i/3}$ bzw.[1] $\omega = e^{2\pi i/5}$.

(b) Zeigen Sie, dass $\sqrt{2}$ in dem 8ten Kreisteilungskörper enthalten ist.

(c) Zeigen Sie, dass jeder quadratische Zahlkörper in einem Kreisteilungskörper enthalten ist.

[1] Hierzu kann es hilfreich sein, zu wissen, dass $\cos(\pi/5) = 1/4(1+\sqrt{5})$. Man kann es sich natürlich auch herleiten ...