Algebraische Zahlentheorie
11. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. J. H. Bruinier
Dipl.-Math. E. Hofmann

SS 2010
14. Juli 2010

Gruppenübung

Aufgabe G1

Beweisen Sie die beiden sogenannten „Ergänzungssätze" zum quadratischen Reziprozitätsgesetz: Für eine ungerade Primzahl p gilt

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \quad \text{sowie} \quad \left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}.$$

Hinweis: Rechnen Sie zur Bestimmung von $\left(\frac{2}{p}\right)$ im Ring $\mathbb{Z}[i]$ der Gaußschen Zahlen.

Aufgabe G2

Zeigen Sie: Jeder quadratische Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ ist in einem Kreisteilungskörper $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ enthalten. Dabei ist ζ_n eine primitive $n$te Einheitswurzel.

Aufgabe G3 (Euler, 1737)

Für die Werte der Riemannschen Zetafunktion an den positiven geraden Stellen $s = 2k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ gilt

$$\zeta(2k) = (-1)^{k+1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} B_{2k}.$$

Die dabei auftretenden *Bernoulli-Zahlen* B_k sind über die Taylorreihenentwicklung

$$\frac{z}{\exp(z) - 1} = B_0 + B_1 z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} z^{2k}$$

definiert, man hat $B_0 = 1$ und $B_1 = -\frac{1}{2}$ sowie $B_{2k+1} = 0$ für alle $k \geq 1$.
Benutzen Sie zum Beweis der Eulerschen Formel die Partialbruchentwicklung des Kotangens,

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

Hinweis: Per Definition des Kotangens hat man

$$z \cot z = iz \frac{\exp 2iz + 1}{\exp 2iz - 1} = \frac{2iz}{\exp 2iz - 1} + iz.$$

Aufgabe G4

Zeigen Sie, dass $\sum_{p \text{ prim}} \frac{1}{p}$ divergiert. Folgern Sie, dass es mehr Primzahlen als Quadratzahlen gibt.

Hinweise: Betrachten Sie $\log \zeta(s)$ und verwenden Sie die Eulerprodukt-Entwicklung von $\zeta(s)$. Führen Sie den Grenzübergang $s \to 1$ aus.