# Algebraische Zahlentheorie
# 10. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

**Fachbereich Mathematik**
**Prof. Dr. J. H. Bruinier**
Dipl.-Math. E. Hofmann

**SS 2010**
**7. Juli 2010**

## Gruppenübung

**Aufgabe G1** (Legendre-Symbol)
Zu einer Primzahl $p$ und einer ganzen Zahl $a$ ist das *Legendresymbol* $\left(\frac{a}{p}\right)$ wie folgt definiert:

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} +1 & \text{falls } \operatorname{ggT}(a,p) = 1 \text{ und } x^2 \equiv a \mod p \text{ lösbar ist} \\ -1 & \text{falls } \operatorname{ggT}(a,p) = 1 \text{ und } x^2 \equiv a \mod p \text{ nicht lösbar ist} \\ 0 & \text{falls } a \equiv 0 \mod p. \end{cases}$$

Weisen Sie folgende Eigenschaften des Legendresymbols nach:

(a) Es ist $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)$ wenn $a \equiv b \mod p$.

(b) Es gilt $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$.

(c) Es gilt $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \mod p$.

(d) Es gilt $\left(\frac{ab^2}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)$ falls $p \nmid b$.

**Aufgabe G2**
Es sei $a_n$ die $n$-te Fibonacci-Zahl. Nach der bekannten Binetschen Formel hat man

$$a_n = \frac{\varepsilon^n - \varepsilon'^n}{\sqrt{5}}, \quad \text{mit} \quad \varepsilon = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \varepsilon' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Zeigen Sie: Ist $p$ eine Primzahl mit $p \neq 2, 5$ so gilt

$$a_p \equiv \left(\frac{p}{5}\right) \mod p.$$

**Aufgabe G3**
Sei $d$ eine quadratfreie ganze Zahl, $L = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ und $D$ die Diskriminante von $L$.

(a) Das Dual (siehe Blatt 9, G1) des Ganzheitsrings $\mathcal{O}_L$ ist durch das gebrochene Ideal

$$\mathcal{O}_L^* = \frac{1}{\sqrt{D}}\mathcal{O}_L$$

gegeben.

(b) Die Spur nimmt ganze Werte auf $\mathcal{O}_L^*$ an, es gilt sogar

$$\operatorname{Bild}\left(\operatorname{tr}_{L/\mathbb{Q}}:\ \mathcal{O}_L^* \to \mathbb{Q}\right) = \mathbb{Z}.$$

**Aufgabe G4**
Weisen Sie nach: Die Anzahl der Lösungen der Kongruenz

$$ax^2 + bx + c \equiv 0 \mod p,$$

mit $\mathrm{ggT}(a,p) = 1$, ist gleich $1 + \left(\frac{b^2-4ac}{p}\right)$.