Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. U. Reif
R. Hartmann, T. Koch

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 10
28.6.2010

11. Übungsblatt zur „Mathematik II für MB“

Aufgabe 35 Intervall im $\mathbb{R}^3$

Gegeben sei das Intervall $I = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{\pi}{2} \le x \le \pi,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le \pi\right\}$. Berechnen Sie

$$\int_I x\sin(xy+z)\,d(x,y,z).$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\int_I x\sin(xy+z)\,d(x,y,z) &= \int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^1\int_0^{\pi} x\sin(xy+z)\,dzdydx \\
&= \int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 x\sin(xy+z)\,dydzdx \\
&= \int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^{\pi} \left[-\cos(xy+z)\right]_{y=0}^{y=1}\,dzdx \\
&= \int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^{\pi} -\cos(x+z)+\cos(z)\,dzdx \\
&= \int_{\pi/2}^{\pi} \left[\sin(z)-\sin(x+z)\right]_{z=0}^{z=\pi}\,dx \\
&= \int_{\pi/2}^{\pi} \sin(x)-\sin(x+\pi)\,dx \\
&= \left[-\cos(x)+\cos(x+\pi)\right]_{x=\pi/2}^{x=\pi} = 2.
\end{aligned}$$

Aufgabe 36 Einheitsdreieck

Sie haben das Dreieck $\triangle$ mit Eckpunkten $A = (2,-1), B = (3,4)$ und $C = (0,0)$ vorliegen. Desweiteren ist die Funktion

$$f(x,y) = x^2 - y^2 = [x,y]\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

gegeben.

a) Berechnen Sie die Integrale

$$\mathrm{Vol}(\triangle) = \int_{\triangle} dX, \qquad \int_{\triangle} f(X)dX$$

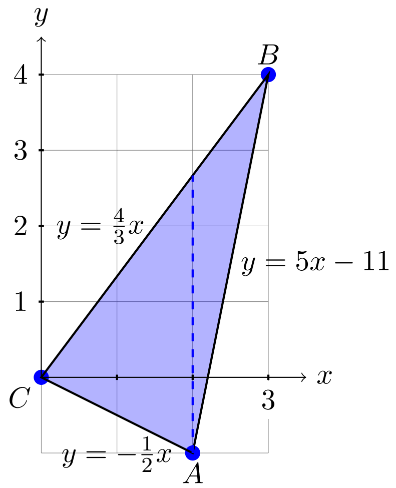
auf direktem Wege, indem Sie projizierbare Mengen nach 10.5 des Skriptes verwenden.

b) Vereinfachen Sie das Integrationsgebiet mithilfe der Substitutionsregel aus 10.9 des Skripts. Bestimmen Sie hierzu explizit eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ so, dass $z \mapsto Mz$ das Einheitsdreieck $(0,0),(1,0),(0,1)$ auf $\triangle$ abbildet.

Sie können den Flächeninhalt des Einheitsdreiecks leicht angeben. Was erhalten Sie in Abhängigkeit von M?

Lösung:

a) Wir haben folgende Situation:



Also gilt

$$\int_{\triangle} F dX = \int_0^2 \int_{-\frac{x}{2}}^{\frac{4x}{3}} F(x,y)dydx + \int_2^3 \int_{5x-11}^{\frac{4x}{3}} F(x,y)dydx.$$

Für die Integrale erhält man sowohl für $F = 1$ als auch $F = x^2 - y^2$ den Wert $11/2$.

b) Die Spalten von M sind die Bilder der Basisvektoren. Wenn $(1,0)^T$ auf A und $(0,1)^T$ auf B abgebildet wird erhält man $M = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$. Der Flächeninhalt des Einheitsdreiecks ist $1/2$. Somit ist $\mathrm{Vol}(\triangle) = |\det M|/2$. In der Tat: $\det M = 11$.

Falls die Studenten das transformierte Integral über f auch noch mal berechnen möchten:

$$M^T \mathrm{diag}(1,-1)M = \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 10 & -7 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 37 Integralprodukt

Berechnen Sie für

$$B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le R^2\}$$

den Wert des Integrals

$$I_R = \int_{B_R} e^{-x^2} e^{-y^2} \, \mathrm{d}(x,y)$$

in Abhängigkeit von $R \in (0,\infty)$.

Bestimmen Sie weiterhin den Grenzwert $\lim_{R\to\infty} I_R$.

Lösung: Wir verwenden Polarkoordinaten. Dann gelten

$$B_R^{\text{polar}} = [0, R] \times [0, 2\pi), \qquad \mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi.$$

Daher ist

$$I_R = \int_0^{2\pi} \int_0^R re^{-r^2} \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \left[e^{-r^2}\right]_0^R \mathrm{d}\varphi = \pi - \pi e^{-R^2}.$$

Für $R \to \infty$ konvergiert dies gegen π.

Aufgabe 38 Kreis weniger Quadrat

Bestimmen Sie den Wert des Integrals

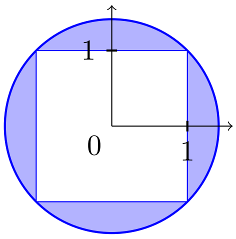
$$\int_G (x^2 + y^2)\, d(x, y)$$

für den Integrationsbereich

$$G = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ |x| \geq 1 \text{ oder } |y| \geq 1,\ x^2 + y^2 \leq 2\right\}.$$

Verwenden Sie Polarkoordinaten. Skizzieren Sie dazu zuerst den Integrationsbereich G.

Lösung:



Die Menge G ist ein Kreis G_1 mit Radius $\sqrt{2}$ aus dem das offene Quadrat $G_2 =]-1, 1[^2$ entfernt wurde. Also gilt

$$\int_G (x^2 + y^2)\, d(x, y) = \int_{G_1} (x^2 + y^2)\, d(x, y) - \int_{G_2} (x^2 + y^2)\, d(x, y).$$

Für das zweite Integral erhält man

$$\begin{aligned}\int_{G_2} (x^2 + y^2)\, d(x, y) &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 x^2 + y^2\, dx\, dy = 2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 y^2\, dx\, dy = 4 \int_{-1}^1 y^2\, dy \\ &= 4 \left[\frac{1}{3} y^3\right]_{y=-1}^{y=1} = \frac{8}{3}.\end{aligned}$$

Für das erste Integral benutzen wir Polarkoordinaten, d.h. die Transformation

$$h : [0, \infty[\times[0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2, \qquad h(r, \varphi) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))^T.$$

Es gilt $\det(J_h(r, \varphi)) = r$.

Somit ergibt sich mit dem Transformationssatz

$$\begin{aligned}\int_{G_1} (x^2 + y^2)\, d(x, y) &= \int_{h^{-1}(G_1)} \left(r^2 \cos(\varphi)^2 + r^2 \sin(\varphi)^2\right) \cdot r\, d(r, \varphi) \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} r^3\, d\varphi\, dr = \left[\frac{1}{2}\pi r^4\right]_{r=0}^{r=\sqrt{2}} = 2\pi.\end{aligned}$$

Also erhält man

$$\int_G (x^2 + y^2)\, d(x, y) = 2\pi - \frac{8}{3}.$$

Hausübung

Aufgabe H37 Integrale (1+1+2 Punkte)

Berechnen Sie folgende Integrale über dem jeweils angegebenen Interval:

a) $\int_I (x + y^2 + z^3)\, dX$ mit $I := [0, 3] \times [0, 2] \times [0, 1]$,

b) $\int_I \sin(x + y) dX$ mit $I := [0, \frac{\pi}{2}]^2$,

c) $\int_I \max(x, y) dX$ mit $I := [-1, 1]^2$.

Lösung:

a) Man erhält 37/2.

b)

$$\begin{aligned}
\int_I \sin(x+y)d(x,y) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y)dy \Big) dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big[-\cos(x+y) \Big]_{y=0}^{\frac{\pi}{2}} dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big[\cos(x) - \cos(x + \frac{\pi}{2}) \Big] dx \\
&= \sin x \Big|_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} - \sin(x + \frac{\pi}{2}) \Big|_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 2.
\end{aligned}$$

c) Im Skript findet sich in 10.3 das analoge Vorgehen für das Minimum über dem Definitionsgebiet $[0, 1]^2$. In unserem Fall ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int_I \max(x,y)dX &= \int_{-1}^{1} \Big[\int_{-1}^{x} x\, dy + \int_x^1 y\, dy \Big] dx \\
&= \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Aufgabe H38 Ellipse & Flächeninhalt (3 Punkte)

Berechnen Sie den Flächeninhalt der Ellipse

$$\mathcal{E}_{a,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}, \quad a, b > 0.$$

Sie können dabei abgewandelte Polarkoordinaten

$$x = ar\ \cos\varphi, \quad y = br\ \sin\varphi$$

verwenden.

Lösung: Die Determinante von $\mathrm{diag}(a, b)$ ist ab. Mit dem Determinantenproduktsatz gelangt man somit zu

$$dxdy = abr\ dr\ d\varphi.$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{E}_{a,b}} 1dX &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 abr\ dr\ d\varphi \\
&= ab\pi.
\end{aligned}$$

Aufgabe H39 Zweites Dreieck (2 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\triangle} \left(2x - 4xy + y^2\right) dX$$

über dem Dreieck $\triangle$ mit den Ecken $(0,0), (2,0), (-1,2)$.

Lösung: Das Integral berechnet sich zu

$$\int_{-1}^{0} \int_{-2x}^{-\frac{2}{3}(x-2)} f(x,y)dydx + \int_{0}^{2} \int_{0}^{-\frac{2}{3}(x-2)} f(x,y)dydx = \frac{8}{3}.$$

Aufgabe H40 Kugelkappe (3 Punkte)

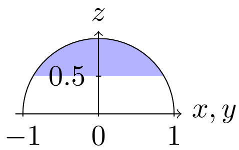
Durch die Menge

$$K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z \geq \frac{1}{2}\right\}$$

wird eine Kugelkappe der Einheitskugel beschrieben. Veranschaulichen Sie diese Menge mit Hilfe einer Skizze und bestimmen Sie das Volumen von K.

Hinweis: Zylinderkoordinaten sind möglicherweise hilfreich.

Lösung:



Verwende Zylinderkoordianten, d.h.

$$h : [0,\infty[\times[0,2\pi[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \qquad h(r,\varphi,z) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), z)^T.$$

Es gilt $\det(J_h(r,\varphi,z)) = r$. Somit ergibt sich für das Volumen von K

$$\begin{aligned}\int_K 1\, d(x,y,z) &= \int_{h^{-1}(K)} r\, d(r,\varphi,z) = \int_0^{2\pi} \int_{1/2}^{1} \int_0^{\sqrt{1-z^2}} r\, dr\, dz\, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{1/2}^{1} \left[\frac{1}{2}r^2\right]_{r=0}^{r=\sqrt{1-z^2}} dz\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_{1/2}^{1} \frac{1}{2}(1-z^2)\, dz\, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2}z - \frac{1}{6}z^3\right]_{z=1/2}^{z=1} d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{5}{48}\, d\varphi = \frac{5}{24}\pi.\end{aligned}$$