Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. U. Reif
R. Hartmann, T. Koch

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 10
21.06.2010

10. Übungsblatt zur „Mathematik II für MB“

Aufgabe 32 Arbeitsintegrale

Berechnen Sie jeweils das Integral $\int_K F \cdot dX$ für die Funktion $F(x,y) := (x, xy)^T$ und die folgenden Wege von $(0,0)^T$ nach $(1,1)^T$:

a) $X_1(t) := (t,t)^T$ mit $t \in [0,1]$,

b) $X_2(t) := (t,t^2)^T$ mit $t \in [0,1]$,

c) die Kurve mit Spur $K = K_3 \cup K_4$, wobei K_3 die Spur der Kurve $X_3(t) := (t,0)^T$ mit $t \in [0,1]$ und K_4 die Spur der Kurve $X_4(t) := (1,t)^T$ mit $t \in [0,1]$ bezeichnet.

Lösung:

a)

$$\int_K F \cdot dX = \int_0^1 \left\langle\, F(X(t)), X'(t) \,\right\rangle dt = \int_0^1 \left\langle\, (t,t^2)^T, (1,1)^T \,\right\rangle dt = \int_0^1 t + t^2 \; dt = 5/6 \; .$$

b)

$$\int_K F \cdot dX = \int_0^1 \left\langle\, (t,t^3)^T, (1,2t)^T \,\right\rangle dt = 9/10 \; .$$

c)

$$\int_K F \cdot dX = \int_{K_3} F \cdot dX_3 + \int_{K_4} F \cdot dX_4 = 1/2 + 1/2 = 1 \; .$$

Aufgabe 33 Potenziale

Berechnen Sie, sofern möglich, die Potenziale der folgenden Vektorfelder:

a) $F(x,y) = (2x, 2y)^T$ b) $F(x,y) = (2y, 2x)^T$

c) $F(x,y) = (x, xy)^T$ d) $F(x,y,z) = (z\cos y, -zx\sin y + z, x\cos y + y)^T$.

Lösung:

(a) $\varphi(x,y) = x^2 + y^2 + C$

(b) $\varphi(x,y) = 2xy + C$

(c) kein Potentialfeld

(d) $\varphi(x,y,z) = xz\cos y + yz + C$

(i) $F(x,y) = (2x, 2y)^T$

$\frac{d}{dy}(2x) = \frac{d}{dx}(2y)$ ✓ Potential!

$\nabla\varphi = F$, $\varphi_x = 2x$, $\varphi_y = 2y$

$\Rightarrow \varphi(x,y) = x^2 + \psi(y)$

$\Rightarrow \varphi_y(x,y) = \psi_y(y) \overset{!}{=} y$, d.h. $\psi(y) = 2y^2 + C$

$\to \underline{\underline{\varphi(x,y) = x^2 + y^2 + C'}}$

(ii) $F(x,y) = (2y, 2x)^T$

$\frac{d}{dy}(2y) \overset{!}{=} \frac{d}{dx}(2x)$ ✓ Potential!

$\varphi_x = 2y \Rightarrow \varphi(x,y) = 2xy + \psi(y)$

$\varphi_y(x,y) = 2x + \psi' \overset{!}{=} 2x$, d.h. $\psi'(y) = 0$

$\to \underline{\underline{\varphi(x,y) = 2xy + C'}}$

(iii) $F(x,y) = (x, xy)$

$\frac{d}{dy}(x) \overset{!}{=} \frac{d}{dx}(xy)$ ↯ Kein Potentialfeld

(iv) $F(x,y,z) = (z\cos y, -zx\sin y + z, x\cos y + y)^T$

$\frac{d}{dy}(z\cos y) \overset{!}{=} \frac{d}{dx}(-zx\sin y + z)$ ✓

$\frac{d}{dz}(z\cos y) \overset{!}{=} \frac{d}{dx}(x\cos y + y)$ ✓ Potential!

$\frac{d}{dz}(-zx\sin y + z) \overset{!}{=} \frac{d}{dy}(x\cos y + y)$ ✓

$\varphi_x \overset{!}{=} z\cos y \Rightarrow \varphi(x,y,z) = xz\cos y + \psi(y,z)$

$\rightsquigarrow \varphi_y = -xz\sin y + \psi_y \overset{!}{=} -zx\sin y + z$

also $\psi_y = z$, $\psi = yz + \chi(z)$, d.h.

$\varphi(x,y,z) = xz\cos y + yz + \chi(z)$

$\rightsquigarrow \varphi_z = x\cos y + y + \chi' \overset{!}{=} x\cos y + y$

also $\chi' = 0$, $\chi = C$

insgesamt: $\varphi(x,y,z) = \underline{\underline{xz\cos y + yz + C}}$

Aufgabe 34 Gravitation

a) Befindet sich ein Punkt P mit der Masse m an der Stelle X, so übt die Erde auf P die Anziehungskraft

$$F(X) = cm\frac{X}{||X||^3}$$

aus, wobei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist. Zeigen Sie, dass das Vektorfeld F ein Potenzial besitzt.

b) Sei $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie, dass das Vektorfeld

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ F(X) := h(||X||) \cdot X$$

ein Potenzial besitzt.

c) Bestimmen Sie für das Vektorfeld F aus Teil a) die Potenzialfunktion.

d) Bestimmen Sie die Arbeit, die Sie verrichten müssen, um eine Punktmasse der Masse m von einer Höhe h_1 über dem Erdmittelpunkt auf eine Höhe h_2 zu befördern (Erdradius $= R \leq h_1 < h_2$).

e) Bestimmen Sie die Arbeit, die Sie verrichten müssen um eine Punktmasse der Masse m unendlich weit von der Erde zu entfernen. Mit welcher Geschwindigkeit muss die Punktmasse von der Erdoberfläche aus bewegt werden?

Lösung:

a)

$$F(X) = (f_1, f_2, f_3)^T = cm\frac{X}{||X||^3} = cm\frac{(x_1, x_2, x_3)^T}{\|(x_1, x_2, x_3)^T\|^3}$$

Es gibt ein Potenzial, da:

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -3cm\frac{x_1x_2}{||X||^5}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_3} = \frac{\partial f_3}{\partial x_1} = -3cm\frac{x_1x_3}{||X||^5}, \quad \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2}{\partial x_3} = -3cm\frac{x_2x_3}{||X||^5}.$$

Nochmal ausführlich für z.B. $\frac{\partial f_1}{\partial x_3}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial x_3} &= \frac{\partial}{\partial x_3}(cm\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}^3}) = cmx_1\frac{\partial}{\partial x_3}(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{-\frac{3}{2}} \\ &= -3cmx_1x_3(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{-\frac{5}{2}} = -3cm\frac{x_1x_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}^5} \\ &= -3cm\frac{x_1x_3}{\|X\|^5}\end{aligned}$$

b) Für $F(X) = (f_1, f_2, ..., f_n)^T = h(||X||) \cdot X$ zeigt sich mit Hilfe der Kettenregel:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_i}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j}h(\|X\|)x_i \\ &= x_i h'(\|X\|)\frac{\partial}{\partial x_j}(\|X\|) \\ &= h'(\|X\|)\frac{x_ix_j}{||X||}\end{aligned}$$

Wenn wir die Indizes vertauschen, sprich $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ bestimmen, erhalten wir das gleiche Ergebnis. Somit gilt $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$.

c) Gesucht ist das Potenzial φ von $F(X)$:

$$\varphi_{x_1} = f_1 = cm\frac{x_1}{\|X\|^3}$$

$$\begin{aligned}\varphi(X)) &= cm\int \frac{x_1}{\|X\|^3}dx_1\\ &= cm\int x_1(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{-\frac{3}{2}}dx_1\\ &= -cm(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{-\frac{1}{2}}+c(x_2,x_3)\\ &= -cm\frac{1}{\|X\|}+c(x_2,x_3)\end{aligned}$$

Durch partielles Ableiten von $\varphi(X)$ nach x_2 und gleichsetzen mit f_2 erhält man

$$\begin{aligned}f_2 = cm\frac{x_2}{\|X\|^3} &= \varphi_{x_2}\\ &= cmx_2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{-\frac{3}{2}}+c'(x_2,x_3)\\ &= cm\frac{x_2}{\|X\|^3}+c'(x_2,x_3) \quad\Rightarrow\quad c'(x_2,x_3)=0\end{aligned}$$

$$c(x_2,x_3) = \int 0dx_2 = d(x_3).$$

Jetzt noch d(z) bestimmen:

$$\begin{aligned}f_3 = cm\frac{x_3}{\|X\|^3} &= \varphi_{x_3}\\ &= cmx_3(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{-\frac{3}{2}}+d'(x_3)\\ &= cm\frac{x_3}{\|X\|^3}+d'(x_3) \quad\Rightarrow\quad d'(x_3)=0\end{aligned}$$

$$d(x_3) = \int 0dx_3 = const..$$

Und wir erhalten für das Potenzial:

$$\varphi(X) = -cm\frac{1}{\|X\|}+const..$$

d) Jeder mögliche Punkt X auf einer Höhe h hat den Abstand h zum Ursprung. Damit ist $\|X\| = h$ und die Arbeit können wir direkt über das Potenzial bestimmen:

$$W = \varphi(h_2)-\varphi(h_1) = cm\Big(\frac{1}{h_1}-\frac{1}{h_2}\Big).$$

e) Mit dem Ergebnis aus d) erhalten wir:

$$W = \lim_{h\to\infty} cm\Big(\frac{1}{R}-\frac{1}{h}\Big) = \frac{cm}{R}.$$

Mit Hilfe des Energieerhaltungssatzes lässt sich die Geschwindigkeit v bestimmen:

$$E_{pot} = E_{kin}, \quad \frac{cm}{R} = \frac{1}{2}mv^2 \quad\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2c}{R}}.$$

Hausübung

Aufgabe H34 Lineare Vektorfelder (1+2+1 Punkte)

a) Gegeben sei das lineare Vektorfeld

$$F(x,y,z) = (7x+6y+8z+3, ax+5y+4, bx+cy+9z)^T \quad \text{mit} \quad a,b,c \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie a, b und c derart, dass F über ein Potenzial φ verfügt.

b) Bestimmen Sie φ.

c) Geben Sie $F(x,y,z)$ in Matrix-Vektor-Notation an, sprich

$$F(X) = AX + B.$$

Welche Eigenschaft muss für die Matrix A allgemein gelten, damit F über ein Potenzial verfügt? Geben Sie auch $\varphi(X)$ in Matrix-Vektor-Notation an.

Lösung:

a) $a = 6$, $b = 8$ und $c = 0$

b) $\varphi(x,y,z) = \frac{7}{2}x^2 + \frac{5}{2}y^2 + \frac{9}{2}z^2 + 6xy + 8xz + 3x + 4y + \text{const.}$

c)

$$F(X) = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 8 \\ 6 & 5 & 0 \\ 8 & 0 & 9 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Matrix A muss symmetrisch sein.

$$\varphi(X) = \frac{1}{2}X^T AX + B^T X + \text{const.} = \frac{1}{2}X^T \begin{pmatrix} 7 & 6 & 8 \\ 6 & 5 & 0 \\ 8 & 0 & 9 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} X + \text{const.}$$

Aufgabe H35 Arbeitsintegral und Potenzial (2+1+1 Punkte)

Gegeben sei das Vektorfeld

$$F(x,y,z) = (2x+yz, 2y+xz, xy)^T$$

und der durch die Kurve

$$X(t) = (t, t^2, t^4)^T \quad \text{für} \quad t \in [0,2]$$

gegebene Weg W.

a) Bestimmen Sie das Wegintegral $\int_W F \cdot dX$.

b) Besitzt F ein Potenzial φ? Bestimmen Sie es gegebenenfalls.

c) Berechnen Sie unter Verwendung von b) das Wegintegral $\int_W F \cdot dX$ längs des Weges W, der die Punkte $P_1 = (0,0,0)$ und $P_2 = (2,4,16)$ verbindet.

Lösung:

a)

$$\begin{aligned}\int_W F \cdot dX &= \int_0^2 \langle\, F(X(t)), X'(t) \,\rangle \, dt = \int_0^2 \langle\, (2t+t^6, 2t^2+t^5, t^3)^T, (1, 2t, 4t^3)^T \,\rangle \, dt \\ &= \int_0^2 2t + 4t^3 + 7t^6 \, dt = t^2 + t^4 + t^7 \Big|_{t=0}^{2} = 148 \,.\end{aligned}$$

b) F besitzt ein Potential φ, da $\mathbb{R}^3$ offen und einfach zusammenhängend ist und weiterhin gilt

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x} = z,$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial x} = y,$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial y} = x.$$

Das Potential φ hat die Form

$$\varphi(x, y) = x^2 + y^2 + xyz + \text{const.}.$$

c)

$$\int_W F \cdot dX = \int_W (\varphi(X(t))' dt = \varphi(2, 4, 16) - \varphi(0, 0, 0) = 148.$$

Aufgabe H36 Potenzial (2+2 Punkte)

Gegeben sei das Vektorfeld $F_\alpha(x, y) = (e^{x+y} + \alpha xy, e^{x+y} + x^2)^T$
mit einem freien Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie α derart, dass F_α ein Potenzial besitzt. Bestimmen Sie dieses Potenzial.

b) Berechnen Sie für $\alpha = 0$ und $X(t) = (t^2, t^3)^T,\ t \in [0, 1]$, das Kurvenintegral

$$W = \int_K F_0(X) \cdot dX,$$

indem Sie F_0 geeignet als Summe zweier Vektorfelder schreiben.

Lösung:

i) $\frac{\partial (F_\alpha)_2}{\partial x} \overset{!}{=} \frac{\partial (F_\alpha)_1}{\partial y}$ 1/2

$\frac{\partial (F_\alpha)_2}{\partial x} = e^{x+y} + 2x$ 1/2

$\frac{\partial (F_\alpha)_1}{\partial y} = e^{x+y} + \alpha x$. 1/2

$\Rightarrow \alpha = 2$ 1/2

$\int (e^{x+y} + 2xy)\, dx = e^{x+y} + x^2 y + g(y)$

Ableiten nach y:

1

$\frac{\partial}{\partial y}(e^{x+y} + x^2 y + g(y)) = e^{x+y} + x^2 + g_y(y) \overset{!}{=} e^{x+y} + x^2$

$\Rightarrow g_y(y) = 0 \quad \Rightarrow g(y) = \text{const.} = c$ 1

$\Rightarrow$ Potential $\varphi(x,y) = e^{x+y} + x^2 + c$.

ii) Direkte Integration wäre sehr unangenehm.

Stattdessen schreiben wir:

$F_0 = F_2 + \begin{pmatrix} -2xy \\ 0 \end{pmatrix}$ und F_2 ist ja ein Potential.

1

Also

$$W = \int_K F_0(x) \cdot dx = \int_K F_2(x)\, dx - \int_K \begin{pmatrix} 2xy \\ 0 \end{pmatrix} dx$$

1

$$= \varphi(1,1) - \varphi(0,0) - \int_0^1 \begin{pmatrix} 2t^5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix} dt =$$

$$= e^2 + 1 - e^0 - \int_0^1 4t^6\, dt = e^2 - 4\frac{t^7}{7}\Big|_0^1$$

$$= e^2 - \frac{4}{7}$$ 1

$\sum_{H4c} = 7$