Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. U. Reif
R. Hartmann, T. Koch

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 10
14.06.2010

9. Übungsblatt zur „Mathematik II für MB“

Aufgabe 29 Parameterintegrale

Berechnen Sie für die folgenden Funktionen jeweils deren Ableitung g' explizit. Geben Sie zwei Lösungswege an:

1. Indem Sie $g(y)$ bestimmen und ableiten.
2. Indem Sie den Integrand partiell differenzieren.

a) $g(y) = \int_0^{\pi/2} f(x,y)\mathrm{d}x$ mit $f(x,y) = \sin x \cos y$.

b) $g(y) = \int_1^{y^2} f(x,y)\mathrm{d}x$, wobei $f(x,y) = (1-y^3)(1-2xy+x^2)$.

Lösung:

(a) Direktes Ausrechnen liefert $g(y) = \cos y$, also $g'(y) = -\sin y$. Die Formel aus 8.3 des Skripts nennt die Vorraussetzung, dass $\partial f/\partial y$ existieren und stetig sein muss. Hier erhält man

$$\begin{aligned} g'(y) &= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin y \mathrm{d}x = -\sin y. \end{aligned}$$

(b) Direktes Berechnen von $g(y)$ ergibt $-\frac{4}{3} + y + y^2 + \frac{4y^3}{3} - y^4 - 2y^5 + \frac{y^6}{3} + y^8 - \frac{y^9}{3}$, somit

$$g'(y) = 1 + 2y + 4y^2 - 4y^3 - 10y^4 + 2y^5 + 8y^7 - 3y^8.$$

In 8.5 des Skripts steht: falls
1. $\partial f/\partial y$ existiert und stetig ist
2. $a'(y), b'(y)$ stetig sind

dann ist $g(y)$ differenzierbar und es gilt

$$g'(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x + f(b(y),y)b'(y) - f(a(y),y)a'(y).$$

Speziell in unserem Fall ist

$$\int_{a(y)}^{b(y)} \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x = 1 + 4y^2 - 4y^3 - 4y^4 + 4y^7 - y^8$$

und

$$\begin{aligned} f(b(y),y)b'(y) - f(a(y),y)a'(y) &= 2y\left(1-y^3\right)\left(1-2y^3+y^4\right) \\ &= 2y - 6y^4 + 2y^5 + 4y^7 - 2y^8. \end{aligned}$$

Was wie erwartet das gleiche Ergebnis für $g'(y)$ liefert.

Aufgabe 30 Kurvenintegrale

Zwei Hochspannungsmasten stehen $d = 100\ m$ voneinander entfernt. Die Leitung hängt in der Mitte durch. Die entstehende Kurve wird durch die Funktion

$$y = f(x) = a \cdot \cosh(x/a)$$

für $-d/2 \leq x \leq d/2$ und dem Parameter $a \in \mathbb{R}$ beschrieben. Die Masten stehen bei $x = -d/2$ und $x = d/2$. In der Mitte zwischen den beiden Masten ($x = 0$) befindet sich die Leitung in einer Höhe von $48\ m$.

(a) Fertigen Sie eine Skizze an. (b) Bestimmen Sie den Parameter a.
(c) Wie lang ist die Leitung?

Lösung:

(b) $48\ m = f(0) = a\cosh(0/a) = a$

(c) Wir berechnen die Länge des Weges $X(t) = (t, a\cosh(t/a))^T$:

$$X'(t) = \big(1, \sinh(t/a)\big)^T\ , \qquad \big\|X'(t)\big\| = \sqrt{1 + \sinh^2(t/a)} = \cosh(t/a)\ .$$

Als Weglänge L ergibt sich also

$$L = \int_{-d/2}^{d/2} \big\|X'(t)\big\|\ dt = \int_{-d/2}^{d/2} \cosh(t/a)\ dt = a\sinh(t/a)\Big|_{-d/2}^{d/2} = 2a\sinh(d/2a) \approx 119,09\ m\ .$$

Aufgabe 31 Klausuraufgabe (30 Minuten)

Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy^2$$

und die Kurve

$$X_r(t) = [e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t]^T, t \in [0, r].$$

a) Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen von f, die von Null verschieden sind.

b) Geben Sie die Taylor-Reihe von f im Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0, 1)$ an.

c) Geben Sie die Hesse-Matrix von f an und bestimmen Sie alle drei kritischen Punkte von f sowie deren Charakter.

d) Berechnen Sie die Länge L_r der Spur der Kurve X_r sowie den Grenzwert $\lim_{r\to\infty} L_r$.

e) Geben Sie ein Vektorfeld F an, das f als Potenzial besitzt. Berechnen Sie das Arbeitsintegral W_r von F entlang der Kurve X_r sowie den Grenzwert $\lim_{r\to\infty} W_r$.

Lösung:

a) $f_x = 2x - y^2, \quad f_y = 2y - 2xy,$
$f_{xx} = 2, \quad f_{xy} = f_{yx} = -2y, \quad f_{yy} = 2 - 2x,$
$f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx} = -2$

b) Es gilt für f am Entwicklungspunkt $X_0 = (0, 1)$:

$$\begin{array}{ccc} f(X_0) = 1, & f_x(X_0) = -1, & f_y(X_0) = 2, \\ f_{xx}(X_0) = 2, & f_{yy}(X_0) = 2, & f_{xy}(X_0) = -2, \\ & f_{xyy}(X_0) = -2 & \end{array}$$

und man erhält damit für die Taylor-Reihe

$$T(f, (0, 1)) = 1 - x + 2(y - 1) + x^2 + (y - 1)^2 - 2x(y - 1) - x(y - 1)^2.$$

c)

$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} 2 & -2y \\ -2y & 2-2x \end{pmatrix}$$

Nullsetzen von ∇f:

$$\nabla f = (2x - y^2, 2y - 2xy) = 0$$

ergibt die drei Lösungen $(x, y) \in \{(0,0), (1, \pm\sqrt{2})\}$. Bestimmen der Eigenwerte liefert die Art des jeweiligen Extrempunktes.

(x,y)	$\nabla^2 f$	EW $\left(\nabla^2 f\right)$	Typ
$(0,0)$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$2, 2$	Minimum
$(1,\sqrt{2})$	$\begin{pmatrix} 2 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$	$4, -2$	Sattelpunkt
$(1,-\sqrt{2})$	$\begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$	$4, -2$	Sattelpunkt

d) Mit

$$\begin{aligned} X_r'(t) &= (-e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t, -e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t)^T, \\ \left\|X_r'(t)\right\| &= \sqrt{e^{-2t}(-\cos t - \sin t)^2 + e^{-2t}(-\sin t - \cos t)^2} = \sqrt{2}e^{-t} \end{aligned}$$

erhalten wir für die Länge $L_r = \sqrt{2}\,(1 - e^{-r})$. Der Grenzwert ist $\sqrt{2}$.

e) f ist Potenzial von F (nach der Definition) gerade dann, wenn $\nabla f = F^T$ gilt, also

$$F = (2x - y^2, 2y - 2xy)^T.$$

Das Arbeitsintegral ist nach seiner Definition in 9.6 des Skripts

$$W_r = \int_0^r F(X_r(t)) \cdot X_r'(t)dt.$$

Mit Hilfe des Potentials f vereinfacht sich die berechnung zu

$$\begin{aligned} W_r &= \int_0^r (f(X(t))'dt = f(X(r)) - f(X(0)) \\ &= f(e^{-r}\cos r, e^{-r}\sin r) - f(1,0) \\ &= e^{-2r}\cos^2 r + e^{-2r}\sin^2 r - e^{-3r}\cos r\sin^2 r - 1 \\ &= e^{-2r} - e^{-3r}\cos r\sin^2 r - 1 \\ &= -1 \quad \text{für} \quad r \to \infty. \end{aligned}$$

Hausübung

Aufgabe H31 Kurvenintegrale (1+2 Punkte)

Wir betrachten einen (näherungsweise) geraden, unendlich langen Leiter, durch den ein konstanter Strom I fließt. Wir nehmen an, der Leiter liege in der z-Achse. Dann wird das entstehende Magnetfeld durch die Funktion

$$F(x,y,z) = \frac{I}{2\pi}\Big(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\Big)^T$$

beschrieben. Sei K eine kreisförmige Kurve parallel zur xy-Ebene mit Radius $r > 0$ und Mittelpunkt auf der z-Achse.

a) Parametrisieren Sie die Kurve K.

b) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_K F \cdot dX$.

Lösung:

a) Für den Mittelpunkt $(0,0,z_0)^T$ hat die Kurve z.B. die Parametrisierung $X(t) := (r\cos t, r\sin t, z_0)^T$ mit $t \in [0, 2\pi]$.

b) Mit obigem Weg gilt $F(X(t)) = \frac{I}{2\pi}(\frac{-\sin t}{r}, \frac{\cos t}{r}, 0)^T$ und $X'(t) = (-r\sin t, r\cos t, 0)^T$. Somit folgt

$$\begin{aligned}
\int_K F \cdot dX &= \int_0^{2\pi} \big\langle\, F(X(t)), X'(t) \,\big\rangle \, dt \\
&= \frac{I}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big\langle \Big(\frac{-\sin t}{r}, \frac{\cos t}{r}, 0\Big)^T,\ (-r\sin t, r\cos t, 0)^T \Big\rangle \, dt \\
&= \frac{I}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t \; dt = \frac{I}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1 \; dt = I \; .
\end{aligned}$$

Aufgabe H32 Kurvenintegrale (3 Punkte)

Wir betrachten die Kurve K von $(0,0,0)^T$ nach $(2,0,1)^T$, die sich aus dem Weg $X_1(t) := (2t^2 - t, t^2, t)^T$ mit $t \in [0,1]$ und dem Geradenstück von $(1,1,1)^T$ nach $(2,0,1)^T$ zusammensetzt. Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_K F \cdot dX$ für das Vektorfeld

$$F(x,y,z) := (2x + yz, y^2 - z^4, xz^2)^T \; .$$

Lösung: Das zweite Geradenstück wird durch $X_2(t) := (1+t, 1-t, 1)^T$ mit $t \in [0,1]$ parametrisiert. Dann gilt

$$F(X_1(t)) = (t^3 + 4t^2 - 2t, 0, 2t^4 - t^3)^T$$

und

$$F(X_2(t)) = (t+3, t^2 - 2t, t+1)^T.$$

Weiterhin ist $X_1'(t) = (4t-1, 2t, 1)^T$ und $X_2'(t) = (1,-1,0)^T$ und somit

$$\begin{aligned}
\int_K F \cdot dX &= \int_0^1 \big\langle\, F(X_1(t)), X_1'(t) \,\big\rangle \, dt + \int_0^1 \big\langle\, F(X_2(t)), X_2'(t) \,\big\rangle \, dt \\
&= \cdots = \int_0^1 6t^3 + 14t^3 - 13t^2 + 5t + 3 \; dt = \cdots = \tfrac{88}{15} \; .
\end{aligned}$$

Aufgabe H33 Extremwerte und Taylorpolynome (2+3+1 Punkte)

Betrachen Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) := x^2 e^{y/2}(y-3) - \tfrac{1}{2}y^2 \,.$$

a) Berechnen Sie den Gradienten $\nabla f(x, y)$ und die Hessematrix $\nabla^2 f(x, y)$.

b) Bestimmen Sie die kritischen Stellen von f und deren Art.

c) Berechnen Sie die Taylorreihe Tf und das Taylorpolyon $T_3 f$ von f im Entwicklungspunkt $(0, 0)$ mit Hilfe bekannter Reihen.

Lösung:

(a)

$$f_x(x, y) = 2xe^{y/2}(y-3) \,, \quad f_y(x, y) = \tfrac{1}{2}x^2 e^{y/2}(y-1) - y \,,$$
$$f_{xx}(x, y) = 2e^{y/2}(y-3) \,, \quad f_{xy}(x, y) = xe^{y/2}(y-1) \,, \quad f_{yy}(x, y) = \tfrac{1}{4}x^2 e^{y/2}(y+1) - 1 \,.$$

Als Gradient und Hessematrix ergibt sich somit

$$\nabla f(x, y) = \left(2xe^{y/2}(y-3), \;\; \tfrac{1}{2}x^2 e^{y/2}(y-1) - y\right) \,, \quad \nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 2e^{y/2}(y-3) & xe^{y/2}(y-1) \\ xe^{y/2}(y-1) & \tfrac{1}{4}x^2 e^{y/2}(y+1) - 1 \end{pmatrix}$$

(b) Nullsetzen des Gradienten liefert

$$2xe^{y/2}(y-3) = 0,$$
$$\tfrac{1}{2}x^2 e^{y/2}(y-1) - y = 0.$$

Die erste Gleichung kann nur für $x = 0$ oder für $y = 3$ erfüllt werden. Für $x = 0$ erhalten wir nach dem Einsetzen in Gleichung zwei die kritische Stelle $(0, 0)$.

$$\nabla^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

zeigt das es sich hier um ein lokales Maximum handelt, da beide Eigenwerte negativ sind. Für $y = 3$ erhalten wir $x = \pm\sqrt{\frac{3}{e^{3/2}}}$. Auch für diese zwei Punkte betrachten wir die Hessematrix. Für $(\sqrt{\frac{3}{e^{3/2}}}, 3)$ erhalten wir

$$\nabla^2 f(\sqrt{\frac{3}{e^{3/2}}}, 3) = \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{\frac{3}{e^{3/2}}}e^{3/2} \\ 2\sqrt{\frac{3}{e^{3/2}}}e^{3/2} & 2 \end{pmatrix}$$

und $\det\nabla^2 f(\sqrt{\frac{3}{e^{3/2}}}, 3) = -12e^{3/2} < 0$. Somit liegt hier ein Sattelpunkt vor. In $(-\sqrt{\frac{3}{e^{3/2}}}, 3)$ ist die Hessematrix mit

$$\nabla^2 f(\sqrt{\frac{3}{e^{3/2}}}, 3) = \begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{\frac{3}{e^{3/2}}}e^{3/2} \\ -2\sqrt{\frac{3}{e^{3/2}}}e^{3/2} & 2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Man sieht das auch hier die Determinate negativ wird und ein Sattelpunkt vorliegt.

(c) Mit der Reihendarstellung der Exponentialfunktion erhalten wir Aufgrund des Entwicklungspunktes (0,0) direkt die Taylorreihe

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2\left(1+\frac{y}{2}+\frac{(y/2)^2}{2!}+\frac{(y/2)^3}{3!}+...\right)(y-3)-\tfrac{1}{2}y^2 \\ Tf(x,y)) &= -3x^2-\tfrac{1}{2}y^2+x^2y-\tfrac{3}{2}x^2y+\tfrac{1}{2}x^2y^2+... \end{aligned}$$

Für das Taylorpolynom dritter Ordnung suchen wir uns die benötigten Terme aus der obigen Reihe zusammen:

$$T_3f(x,y)) = -3x^2-\tfrac{1}{2}y^2.$$