Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. U. Reif
R. Hartmann, T. Koch

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 10
07.06.2010

8. Übungsblatt zur „Mathematik II für MB“

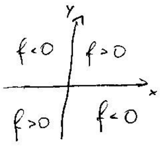
Aufgabe 26 Extremwerte

Bestimmen Sie ohne Berechung des Gradienten oder der Hessematrix (z.B. anhand einer geeigneten Skizze) die Art des kritischen Punktes $(0,0)$ der folgenden Funktionen:

(a) $f(x,y) := xy$, (b) $f(x,y) := x^2 - y^2$, (c) $f(x,y) := x^2 + y^2$,
(d) $f(x,y) := \sqrt{1-x^2-y^2}$, (e) $f(x,y) := \cos(xy)\sin(xy)$, (f) $f(x,y) := x^2 \sin(xy)$.

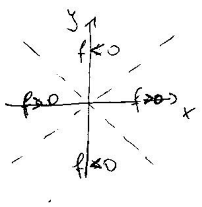
Lösung:

(i) $f = xy$



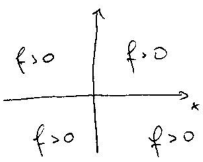
Sattelpunkt
$f(0,0) = 0$

(ii) $f = x^2 - y^2$



Sattelpunkt
$f(0,0) = 0$

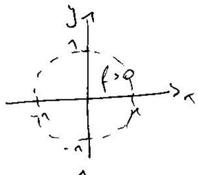
(iii) $f = x^2 + y^2$



Minimum
$f(x,y) = 0$

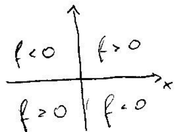
(iv) $f = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

mit $x^2 + y^2 \leq 1$



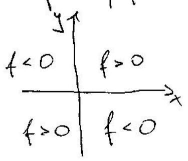
Maximum
$f(0,0) = 1$

(v) $f = \sin(xy)\cos(xy)$



Sattelpunkt
$f(0,0) = 0$

(vi) $f = x^2 \sin(xy)$



Sattelpunkt
$f(0,0) = 0$

Aufgabe 27 Definitheit

Welche der nachfolgenden Matrizen sind
a) positiv definit b) negativ definit c) indefinit d) nichts davon?
Begründen Sie Ihre Aussage!

$$A_1 = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix},$$
$$A_5 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tip: Jede rationale Nullstelle eines normierten Polynoms (höchster Koeffizient ist 1) mit ganzzahligen Koeffizienten ist ganzzahlig und Teiler des Absolutgliedes (Absolutglied=Koeffizient von x^0).

Lösung:

Für die 2×2-Matrizen kann nur bei der zweiten (die symmertrisch ist) die Regel aus 7.5 des Skripts verwendet werden:

$$\det A_2 = 3 > 0 \text{ und } (A_2)_{11} > 0 \implies A_2 \text{ positiv def.}$$

Für die restlichen und die 3×3-Matrizen gilt:

Matrix	$\det(A_j - \lambda E))$	**EW**	**Typ**
A_1	$12 + 3\lambda + \lambda^2$	$\frac{1}{2}\left(-3 \pm i\sqrt{39}\right)$	nichts davon
A_2	$3 - 5\lambda + \lambda^2$	$\frac{1}{2}\left(5 \pm \sqrt{13}\right)$	pos. def.
A_3	$-7\lambda + \lambda^2$	$7, 0$	nichts
A_4	$-42 - \lambda + \lambda^2$	$7, -6$	indefinit
A_5	$12 - 2\lambda - 6\lambda^2 - \lambda^3$	$-2-\sqrt{10}, -2, -2+\sqrt{10}$	indefinit
A_6	$100 + 15\lambda - 6\lambda^2 - \lambda^3$	$-2-\sqrt{14}, -2+\sqrt{14}, 0$	indefinit

Aufgabe 28 Temperaturverteilung

Eine rechteckigen Platte $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 0 \le x \le 1, \; |y| \le 1\}$ habe die Temperaturverteilung $T(x,y) = 1 - 4\ln^2(x+1)y^2$, für $(x,y) \in D$.

a) Skizzieren Sie die Temperaturverteilung durch einige Isothermen, d.h., Linien konstanter Temperatur.

b) Bestimmen Sie alle Extrema und deren Art innerhalb des Rechtecks.

c) Bestimmen Sie alle Extrema auf dem Rand des Rechtecks.

d) Geben Sie die globalen Maxima und Minima an.

Lösung:

a) Wir setzen $1 - 4\ln^2(x+1)y^2 = c \le 1$. Wir lösen nach x auf:

$$\ln^2(x+1) = \frac{1-c}{4y^2} \quad \Rightarrow \quad x = -1 + e^{\frac{\pm\sqrt{1-c}}{2y}}.$$

b) $\nabla T = (-8\,\frac{\ln(x+1)y^2}{x+1}, -8\,(\ln(x+1))^2\, y)$
Nullstellen aus 1. Komponente $(x,y) \in \{(u,0) \in \mathbb{R}^2\}$ oder $(x,y) \in \{(0,v) \in \mathbb{R}^2\}$
Nullstellen aus 2. Komponente $(x,y) \in \{(u,0) \in \mathbb{R}^2\}$ oder $(x,y) \in \{(0,v) \in \mathbb{R}^2\}$
Daher sind alle Punkte in $N_k := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad y = 0, 0 < x < 1\}$ kritische Stellen. Die

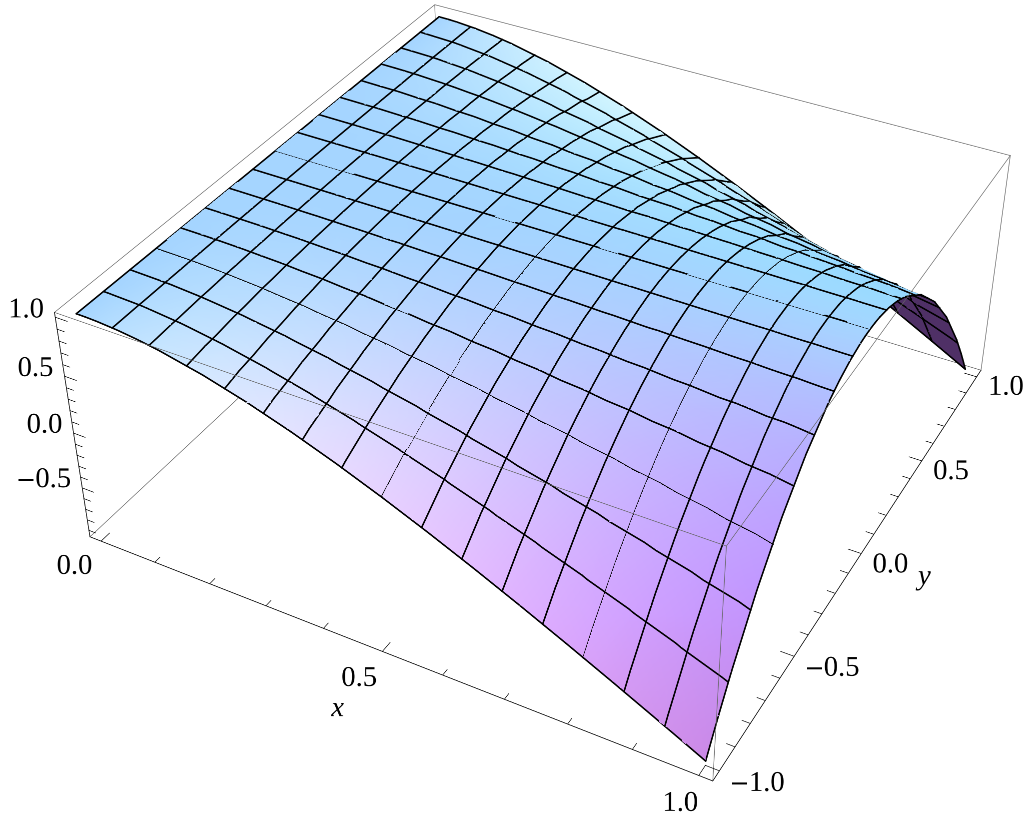


Abbildung 1: Temperaturverteilung $T(x, y)$ aus Aufgabe 28.

übrigen liegen auf dem Rand.

$$\nabla^2 T = \begin{pmatrix} -8\,\frac{y^2}{(x+1)^2} + 8\,\frac{\ln(x+1)y^2}{(x+1)^2} & -16\,\frac{\ln(x+1)y}{x+1} \\ -16\,\frac{\ln(x+1)y}{x+1} & -8\,(\ln(x+1))^2 \end{pmatrix}$$

Leider ist für alle $(x, y) \in N_k$ der Term $\det(\nabla^2 T(x, y)) = 0$. Daher müssen wir uns die Stellen separat anschauen. Aber für alle $x \in N_k$ ist $T(x, y) = 1$. Daher handelt es sich um lokale Maxima. Da die Funktion nirgends größer wird sogar um globale.

c) Setze zuerst $x = 1$. Dann bleibt $T(1, y) = 1 - 4\ln(2)^2 y^2$. Daher Randmaximum bei $(1, 0, 1)$ und zwei Minima bei $(1, \pm1, 1 - 4\ln(2)^2$. Der dritte Wert in der Klammer entspricht dem Funktionswert.
Nun sei $x = 0$. Dann bleibt $T(0, y) = 1$. Daher Randmaximum für alle $(x, y) \in \{(0, v) \in \mathbb{R}^2\}$.
Falls $y = \pm1$. Das gibt $T(x, 1) = 1 - 4\ln^2 x$ und deshalb keine neuen Randextrema.

d) Globale Maxima bei $(0, y, 1)$ und $(x, 0, 1)$, globale Minima bei $(1, \pm1, 1 - 4\ln(2)^2)$.

Hausübung

Aufgabe H27 Extremwertaufgabe (2 Punkte)

Zerlegen Sie die Zahl 12 in drei echt positive Summanden, so dass das Produkt der Summanden möglichst groß ist.

Lösung:

$x + y + z = 12$, $x, y, z > 0$

$x \cdot y \cdot z \to \max!$

$\Rightarrow z = 12 - x - y$

setze $f(x, y, z) = x \cdot y \cdot z$

Einsetzen von $z = 12 - x - y$

$\Rightarrow f(x, y) = (12 - x - y) x y = 12xy - x^2y - xy^2$

$f(x,y)$ ist zu maximieren

$f_x = 12y - 2xy - y^2 \overset{!}{=} 0$ (Beachte die Nebenbedingung $x, y, z > 0$!!!)

$f_y = 12x - x^2 - 2xy \overset{!}{=} 0$

f_x geht aus f_y hervor nach Vertauschen von x und y!

$\rightsquigarrow$ es muss gelten: $x = y$

Einsetzen in f_x: $12x - 2x^2 - x^2 = 0$

(i) $x = 0$

$\rightsquigarrow x, y = 0$, $z = 12$

$x \cdot y \cdot z = 0$

(ii) $x \neq 0$

$\Rightarrow 12 - 3x = 0$, $x = 4$

$x, y = 4$, $z = 4$

$x \cdot y \cdot z = 64$

Lösung ist: $\underline{\underline{(x, y, z) = (4, 4, 4)}}$

Aufgabe H28 Ausgleichsrechnung (1+1+1 Punkte)

Wird ein Fahrzeug aus der Geschwindigkeit v auf Stillstand abgebremst, so setzt man für den Bremsweg y in Abhängigkeit von v folgende Gesetzmäßigkeit an:

$$y = av^2 + bv \ .$$

Zur Bestimmung von a und b werden 3 Messungen durchgeführt:

$$\begin{array}{rccc} v_i[\frac{m}{s}]: & 9 & 17 & 25 \\ y_i[m]: & 3 & 9 & 14 \end{array}$$

Da die Messungen ungenau sind, gibt es kein Tupel $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, sodass $y_i = av_i^2 + bv_i$ für alle $i = 1,2,3$ gilt. Gesucht ist deswegen die "*im quadratischen Mittel beste*" oder "*ausgleichende*" Wahl von (a,b), d.h., es wird das Minimum der Funktion

$$\mathbb{R}^2 \ni (a,b) \mapsto \sum_{i=1}^{3} (y_i - av_i^2 - bv_i)^2$$

gesucht.

a) Dieses Problem lässt sich allgemein als Minimalproblem formulieren:

Gegeben sei eine $n \times m$-Matrix A mit $n > m$ und ein Vektor $Y \in \mathbb{R}^n$. Gesucht ist ein Mininum der Abbildung $\mathbb{R}^m \ni X \mapsto ||Y - AX||^2$.

Bestimmen Sie die Matrix A und den Vektor Y für das obige Problem.

b) Zeigen: Sie $X_0 \in \mathbb{R}^m$ löst das Minimalproblem genau dann, wenn $A^T A X_0 = A^T Y$.

c) Lösen Sie das Minimalproblem für obiges Beispiel.

Lösung:

a) $A = \begin{pmatrix} 9^2 & 9 \\ 17^2 & 17 \\ 25^2 & 25 \end{pmatrix}$ und $Y = (3, 9, 14)^T$.

Beachte $(||Y - AX||)' = \frac{(Y-AX)^T}{||Y-AX||}(-A) = -\frac{1}{||Y-AX||}(Y^T A - X^T A^T A)$. Hierbei wurde die Kettenregel verwendet (AX ist die innere Funktion) und die Ableitung für die Norm (Skript S23 5.1).

$$\begin{aligned} (||Y - AX||)' = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{||Y - AX||}(Y^T A - X^T A^T A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -Y^T A + X^T A^T A = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad Y^T A = X^T A^T A \quad \Leftrightarrow \quad A^T Y = A^T A X \end{aligned}$$

Bemerkung: Anstelle der Minima von $||Y - AX||$ kann man auch die von $\|Y - AX\|^2$ suchen. Letzteres abgeleitet ergibt direkt $Y^T A - X^T A^T A$.

b) Löst man das LGS, das sich in b) ergibt erhält man

$$\begin{aligned} (a,b) &= \frac{1}{3252272}(33065, 1025639) \\ &= (0.0102, 0.3154). \end{aligned}$$

Aufgabe H29 Extremwertaufgabe und Polarkoordinaten (6x1 Punkte)

Wir betrachten die Funktion $f(x,y) := (3x^2 y - y^3)^2 e^{-x^2-y^2}$ und wollen die lokalen Extrema bestimmen. In Abbildung 2 sehen Sie eine Darstellung des Graphen der Funktion. Man sieht, dass die Funktion Drehsymmetrien aufzuweisen scheint. Wir betrachten deshalb die Funktion in Polarkoordinaten.

Die Funktion $P : [0,\infty) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ mit $P(r,\varphi) := (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ rechnet Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten um.

a) Bestimmen Sie die Ableitung $\nabla f(x,y)$ von f.

b) Bestimmen Sie die Ableitung $DP(r, \varphi)$ der Funktion P.

c) Zeigen Sie mit Hilfe der Kettenregel, dass im Punkt $(x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ gilt

$$\frac{\partial(f\circ P)}{\partial r}(r,\varphi) = f_x(x,y)\cos\varphi + f_y(x,y)\sin\varphi\ ,$$
$$\frac{\partial(f\circ P)}{\partial \varphi}(r,\varphi) = r(-f_x(x,y)\sin\varphi + f_y(x,y)\cos\varphi)\ .$$

(Vergleichen Sie ggf. mit Ihrer Formelsammlung.)

d) Berechnen Sie die Verkettung $f \circ P$ und deren Ableitung. Vergleichen Sie mit der in c) gezeigten Ableitungsregel. *Hinweis:* Nutzen Sie zur Vereinfachung $\sin(3\varphi) = \sin\varphi(3\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$.

e) Bestimmen Sie die kritischen Stellen von f, indem Sie die kritischen Stellen von $f\circ P$ berechnen.

f) Bestimmen Sie die Art der kritischen Stellen anhand der Skizze.

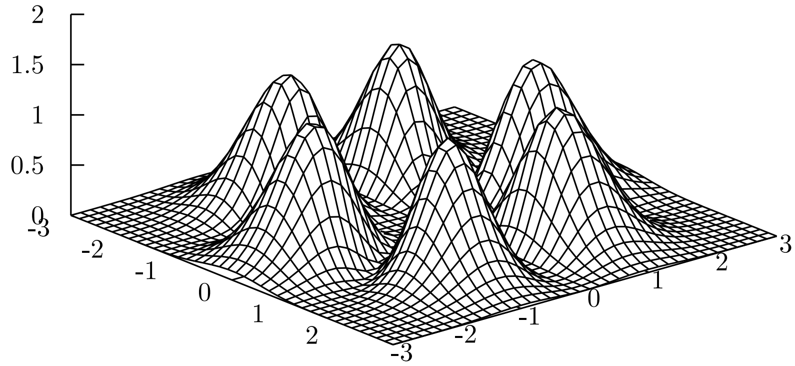


Abbildung 2: Graph von $f(x, y) = (3x^2y - y^3)^2e^{-x^2-y^2}$

Lösung:

a)

$$f_x(x,y) = 2xy^2(3x^2-y^2)e^{-x^2-y^2}(6-3x^2+y^2)\ ,$$
$$f_y(x,y) = 2y(3x^2-y^2)e^{-x^2-y^2}(3x^2-3y^2-3x^2y^2+y^4)\ .$$

b)

$$DP(r,\varphi) = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{pmatrix}\ .$$

c) Nach der Kettenregel gilt

$$\begin{aligned}\big((f\circ P)_r(r,\varphi)\quad (f\circ P)_\varphi(r,\varphi)\big) &= \nabla(f\circ P)(r,\varphi) = \nabla f(P(r,\varphi))\cdot DP(r,\varphi) = \nabla f(x,y)\cdot DP(r,\varphi)\\ &= \big(f_x(x,y)\quad f_y(x,y)\big)\cdot\begin{pmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{pmatrix}\ .\end{aligned}$$

Der erste Eintrag von $\nabla(f\circ P)$ ist die partielle Ableitung $\frac{\partial(f\circ P)}{\partial r}(r,\varphi)$, der zweite Eintrag ist $\frac{\partial(f\circ P)}{\partial\varphi}(r,\varphi)$. Die zu zeigende Gleichung ergibt sich dann durch Ausmultiplizieren der Matrixeinträge.

d)

$$
\begin{aligned}
(f\circ P)(r,\varphi) &= f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = r^6 e^{-r^2}\sin^2\varphi(3\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)^2 = r^6e^{-r^2}\sin^2(3\varphi)\ ,\\
\frac{\partial(f\circ P)}{\partial r}(r,\varphi) &= (6-2r^2)r^5e^{-r^2}\sin^2(3\varphi)\ ,\\
\frac{\partial(f\circ P)}{\partial \varphi}(r,\varphi) &= 6r^6e^{-r^2}\sin(3\varphi)\cos(3\varphi) = 3r^6e^{-r^2}\sin(6\varphi)
\end{aligned}
$$

e) Die Funktion f hat an einer Stelle $(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ genau dann einen kritischen Punkt, wenn $f\circ P$ an der Stelle (r,φ) einen kritischen Punkt hat. In diesem Fall gilt $\frac{\partial(f\circ P)}{\partial r}(r,\varphi) = 0 = \frac{\partial(f\circ P)}{\partial \varphi}(r,\varphi)$. Die partielle Ableitung nach r verschwindet genau dann, wenn $r=\sqrt{3}$ oder $r=0$ oder $\sin(3\varphi)=0$ gilt. Die partielle Ableitung nach φ verschwindet genau dann, wenn $r=0$ oder $\sin(6\varphi)=0$ gilt. Wir unterscheiden deshalb mehrere Fälle:

i. Als erstes betrachten wir den Fall $r=0$. In diesem Fall hat $(f\circ P)$ für jeden Wert von φ einen kritischen Punkt in $(0,\varphi)$. Für die Funktion f folgt, dass $(0,0)$ ein kritischer Punkt ist. (Diese kritische Stelle taucht auch im nächsten Fall auf. Deshalb werden wir sie im Folgenden nicht mehr gesondert behandeln.)

ii. Als zweites betrachten wir die Fälle mit $\sin(3\varphi)=0$, d.h. $\varphi\in\left\{0, \frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi, \pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi\right\}$. In diesen Fällen gilt auch $\sin(6\varphi)=0$ und somit verschwinden beide partiellen Ableitungen, d.h. für diese Werte von φ und beliebige Werte von r ist (r,φ) eine kritische Stelle von $(f\circ P)$. Für die Funktion f folgt, dass die 3 Geraden

$$
(t,0)\ ,\qquad (\tfrac{1}{2}t, \tfrac{1}{2}\sqrt{3}t)\ ,\qquad (-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}t, \tfrac{1}{2}t)
$$

mit $t\in\mathbb{R}$ aus kritischen Stellen bestehen.

iii. Als drittes betrachten wir die Fälle mit $r>0$ und $\sin(3\varphi)\neq 0$ und $\sin(6\varphi)=0$, d.h. $\varphi\in\left\{\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{11}{6}\pi\right\}$. In diesem Fällen verschwindet die erste Ableitung genau dann, wenn $r=\sqrt{3}$, d.h. die Punkte

$$
(\sqrt{3}, \tfrac{1}{6}\pi)\ ,\quad (\sqrt{3}, \tfrac{1}{2}\pi)\ ,\quad (\sqrt{3}, \tfrac{5}{6}\pi)\ ,\quad (\sqrt{3}, \tfrac{7}{6}\pi)\ ,\quad (\sqrt{3}, \tfrac{3}{2}\pi)\ ,\quad (\sqrt{3}, \tfrac{11}{6}\pi)
$$

sind kritische Stellen von $f\circ P$. Für die Funktion f sind also die Punkte

$$
(\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}\sqrt{3})\ ,\quad (0,\sqrt{3})\ ,\quad (-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}, \tfrac{3}{2})\ ,\quad (-\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}\sqrt{3})\ ,\quad (0,-\sqrt{3})\ ,\quad (\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}\sqrt{3})
$$

kritische Stellen.

f) In der Skizze sieht man, dass auf den Geraden aus kritischen Punkte lokale Minima vorliegen. Auf diesen Punkten ist f konstant Null. Die 6 isomierten Punkte sind lokale Maxima von f.

Aufgabe H30 Multivariate Taylorpolynome (Wdh - 0 Punkte)

a) Sei

$$
f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\quad f(x,y,z) = xy^2z^3.
$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Ordnung 2 von f. Verwenden Sie dieses anschließend, um $1.002\cdot 2.003^2\cdot 3.004^3$ näherungsweise zu berechnen.

b) Berechnen Sie das Taylorpolynom von Ordnung 4 der Funktion

$$
f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad f(x,y) = \exp(x^2y).
$$

Tip: Taylorreihe von $\exp(z)$.

Lösung:

a) Das Taylorpolynom von Ordnung 2 von f an $a = (a_1, a_2, a_3)$ ist

$$\begin{aligned} T_1 f\big((x_1, x_2, x_3), a\big) &= f(a) + \partial_1 f(a)(x_1 - a_1) + \partial_2 f(a)(x_2 - a_2) + \partial_3 f(a)(x_3 - a_3) \\ &= a_1 a_2^2 a_3^3 + a_2^2 a_3^3 (x_1 - a_1) + 2a_1 a_2 a_3^3 (x_2 - a_2) + 3a_1 a_2^2 a_3^2 (x_3 - a_3). \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} 1.002 \cdot 2.003^2 \cdot 3.004^3 &= f(1.002, 2.003, 3.004) \\ &\approx T_1 f\big((1.002, 2.003, 3.004), (1, 2, 3)\big) \\ &= 1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 + 2^2 \cdot 3^3 \cdot 0.002 + 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3^3 \cdot 0.003 + \\ & +3 \cdot 1 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 0.004 \\ &= 108 + 108 \cdot 0.002 + 108 \cdot 0.003 + 108 \cdot 0.004 \\ &= 108.972. \end{aligned}$$

b) Es ist $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, also $\exp(x^2 y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2 y)^n}{n!}$. Daher ist das Taylorpolynom von Ordnung 4 von f an $(0, 0)$

$$T_4 f\big((x, y), (0, 0)\big) = 1 + x^2 y.$$