Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. U. Reif
R. Hartmann

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 10
31.05.2010

7. Übungsblatt zur „Mathematik II für MB“

Aufgabe 23 Aufwärmen

Bestimmen Sie das quadratische Taylor-Polynom der Funktion

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$$

im Punkt $(1,1)$.

Lösung: Es gilt $f(x,y) = \frac{x+y-2y}{x+y} = 1 - 2\frac{y}{x+y}$ sowie $f(x,y) = \frac{2x-(x+y)}{x+y} = 2\frac{x}{x+y} - 1$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \frac{2y}{(x+y)^2} \\
f_y(x,y) &= -\frac{2x}{(x+y)^2} \\
f_{xx}(x,y) &= \frac{-4y}{(x+y)^3} \\
f_{yy}(x,y) &= \frac{4x}{(x+y)^3} \\
f_{xy}(x,y) &= \frac{2}{(x+y)^2} - \frac{4y}{(x+y)^3} = (2x-2y)/(x+y)^3.
\end{aligned}$$

Am Entwicklungspunkt $(1,1)$ erhalten wir somit:

$$f(1,1) = 0, \quad f_x(1,1) = \frac{1}{2}, \quad f_y(1,1) = -\frac{1}{2}$$

$$f_{xx}(1,1) = -\frac{1}{2}, \quad f_{yy}(1,1) = \frac{1}{2}, \quad f_{xy}(1,1) = 0.$$

Das quadratische Taylor-Polynom ergibt sich damit zu

$$\begin{aligned}
T_3 f(x,y) &= f(1,1) + f_x(1,1)(x-1) + f_y(1,1)(y-1) \\
&\quad + f_{xy}(1,1)(x-1)(y-1) + \frac{1}{2} f_{xx}(1,1)(x-1)^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} f_{yy}(1,1)(y-1)^2 \\
&= \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2}(y-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{4}(y-1)^2.
\end{aligned}$$

Aufgabe 24 Bekannte Reihen

Stellen Sie für die folgenden Funktionen das quadratische Taylorpolynom $T_3 f$ um den angegebenen Entwicklungspunkt auf. Nutzen Sie dazu bekannte Reihenentwicklungen.

(a) $f(x,y) := \frac{1}{1+x+y}$ um $(0,0)$,

(b) $f(x,y,z) := \cos(x)\sin(y)e^z$ um $(0,0,0)$.

Lösung:

(a) Wegen $\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ gilt mit $q = -(x+y)$

$$f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x+y)^n$$

Wegen $(x+y)^n = O(\|X\|^n)$ ergibt sich somit $f(x,y) = 1-(x+y)+(x+y)^2+O(\|X\|^3)$, also

$$T_3 f(x,y) = 1 - x - y + x^2 + 2xy + y^2 \ .$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + O(x^4) & \sin y &= y + O(y^3) & e^z &= 1 + z + \tfrac{1}{2}z^2 + O(z^3) \\ &= 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + O(\|X\|^4)\ , & &= y + O(\|X\|^3)\ , & &= 1 + z + \tfrac{1}{2}z^2 + O(\|X\|^3) \end{aligned}$$

Für die Funktion f ergibt sich dann durch Einsetzen

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \big(1 - \tfrac{1}{2}x^2 + O(\|X\|^4)\big)\big(y + O(\|X\|^3)\big)\big(1 + z + \tfrac{1}{2}z^2 + O(\|X\|^3)\big) \\ &= \big(y + O(\|X\|^3)\big)\big(1 + z + \tfrac{1}{2}z^2 + O(\|X\|^3)\big) \\ &= y + yz + O(\|X\|^3)\ . \end{aligned}$$

Das Taylorpolyon ist somit $T_3 f(x,y) = y + yz$.

Aufgabe 25 Restglied

Sei $f(x,y) = x^y$. Bestimmen Sie das quadratische Taylorpolynom von f im Punkt $(1,1)$. Schätzen Sie anschließend den Fehler ab, der sich bei der näherungsweisen Berechnung von $1.05^{1.02}$ unter Verwendung dieses Taylorpolynoms ergibt.

Hinweis: Verwenden Sie die verallgemeinerte Restglieddarstellung, die Sie bereits aus dem Eindimensionalen kennen:

$$R_3 f(x,y) = \sum_{l+n=3} \frac{\partial_x^l \partial_y^n f(\nu,\zeta)}{l!n!}(x-x_0)^l (y-y_0)^n$$

In diesem Falle liegt der Punkt (ν,ζ) auf der Verbindungsstrecke zwischen (x_0,y_0) und (x,y). Schätzen Sie die auftretenden Ableitungen ab unter Verwendung der Ungleichung $\ln x \le x-1$ für $x \ge 1$.

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= yx^{y-1} & f_{xx}(x,y) &= y(y-1)x^{y-2} \\ f_{xxx}(x,y) &= y(y-1)(y-2)x^{y-3} & f_y(x,y) &= (\ln x)x^y \\ f_{yy}(x,y) &= (\ln x)^2 x^y & f_{yyy}(x,y) &= (\ln x)^3 x^y \\ f_{xy}(x,y) &= x^{y-1} + (\ln x)yx^{y-1} & f_{xyy}(x,y) &= 2(\ln x)x^{y-1} + (\ln x)^2 yx^{y-1} \\ f_{yxx}(x,y) &= (2y-1)x^{y-2} + (\ln x)y(y-1)x^{y-2} \end{aligned}$$

Also ergibt sich $f(1,1) = f_x(1,1) = f_{xy}(1,1) = 1$ and $f_y(1,1) = f_{xx}(1,1) = f_{yy}(1,1) = 0$. Es folgt

$$T_2 f(x,y) = 1 + (x-1) + (x-1)(y-1)$$

Um den Fehler abzuschätzen, verwenden wir obige Restglieddarstellung

$$R_3 f(x,y) = \sum_{l+n=3} \frac{\partial_x^l \partial_y^n f(\nu,\zeta)}{l!n!}(x-x_0)^l (y-y_0)^n$$

und beachten den Bereich, in dem (ν,ζ) liegen kann. Es ergibt sich unter Verwendung der angegebenen Ungleichung

$$\begin{array}{ll} |f_{xxx}| \leq 1.02 \cdot 0.02 = 2.04 \cdot 10^{-2} & |f_{xyy}| \leq 2 \cdot 0.05 \cdot 1.05 + (0.05)^2 \cdot 1.02 \cdot 1.05 \leq 1.34 \cdot 10^{-4} \\ |f_{xxy}| \leq 1.04 + 0.05 \cdot 1.02 \cdot 0.02 \leq 1.05 & |f_{yyy}| \leq (0.05)^3 \cdot 1.05^2 \leq 1.4 \cdot 10^{-4} \end{array}$$

Es folgt

$$|R_3 f(1.05, 1.02)| \leq \frac{1}{3!} \cdot 2.04 \cdot 10^{-2} \cdot (0.05)^3 + \frac{1}{2!} \cdot 1.05 \cdot (0.05)^2 \cdot 0.02 + \frac{1}{2!} \cdot 1.34 \cdot 10^{-4} \cdot 0.05 \cdot (0.02)^2$$
$$+ \frac{1}{3!} \cdot 1.4 \cdot 10^{-4} \cdot (0.02)^3 \leq 2.68 \cdot 10^{-5}$$

Hausübung

Aufgabe H24 Produkte (2+1 Punkte)

(i) Sei

$$f(x, y, z) = xy^2z^3.$$

Stellen Sie das lineare Taylorpolynom $T_2 f$ von f im Punkt $(1, 2, 3)$ auf. Berechnen Sie nun mit Hilfe von $T_2 f$ den Ausdruck $1.002 \cdot 2.003^2 \cdot 3.004^3$ näherungsweise.

(ii) Stellen Sie das kubische Taylorpolynom von

$$f(x, y) = \exp(x^2 y).$$

in $(0, 0)$ auf.
Hinweis: Verwenden Sie die Reihendarstellung von $\exp(z)$.

Lösung:

(i) Das lineare Taylor-Polynom von f für einen beliebigen Punkt $a = (a_1, a_2, a_3)$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} T_1 f\left((x, y, z), a\right) &= f(a) + f_x(a)(x - a_1) + f_y(a)(y - a_2) + f_z(a)(z - a_3) \\ &= a_1 a_2^2 a_3^3 + a_2^2 a_3^3 (x - a_1) + 2a_1 a_2 a_3^3 (y - a_2) + 3a_1 a_2^2 a_3^2 (z - a_3). \end{aligned}$$

Für $a = (1, 2, 3)$ ergibt sich also

$$\begin{aligned} 1.002 \cdot 2.003^2 \cdot 3.004^3 &= f(1.002, 2.003, 3.004) \\ &\approx T_1 f\,(1.002, 2.003, 3.004) \\ &= 1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 + 2^2 \cdot 3^3 \cdot 0.002 + 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3^3 \cdot 0.003 + \\ &\quad +3 \cdot 1 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 0.004 \\ &= 108 + 108 \cdot 0.002 + 108 \cdot 0.003 + 108 \cdot 0.004 \\ &= 108.972. \end{aligned}$$

(ii) Es gilt $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, also $\exp(x^2 y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2 y)^n}{n!}$. Folglich ist das kubische Taylorpolynom von f an der Stelle $(0, 0)$ gegeben durch

$$T_4 f\big((x, y), (0, 0)\big) = 1 + x^2 y.$$

Aufgabe H25 Approximation (1+1+1 Punkte)

Wir betrachten zwei Funktionen f und g, die wie folgt definiert sind:

$$f(x, y) = x^2 \sin(xy/2)$$

$$g(x, y) = x^2 - \cos(x/y).$$

a) Berechnen Sie das quadratische Taylorpolynom von f an der Entwicklungsstelle $(1, \pi)$.
b) Berechnen Sie das quadratische Taylorpolynom von g an der Entwicklungsstelle $(\pi, 1)$.
c) Vergleichen Sie die Funktionswerte $f(1.1, \pi)$ und $g(\pi + 0.1, 0.8)$ mit den entsprechenden Näherungswerten aus der Taylorentwicklung. Vergleichen Sie anschließend die Funktionswerte $f(1, 4\pi)$ und $g(0, 1)$ mit den entsprechenden Näherungswerten aus der Taylorentwicklung. Was ist passiert?

Lösung: a) Berechnung der nötigen partiellen Ableitungen:
$f_x(x,y) = 2x\sin(xy/2) + x^2(y/2)\cos(xy/2)$,
$f_y(x,y) = (x^3/2)\cos(xy/2)$
$f_{xx}(x,y) = 2\sin(xy/2) + 2xy\cos(xy/2) - (1/4)x^2y^2\sin(xy/2)$
$f_{xy}(x,y) = (3/2)x^2\cos(xy/2) - (1/4)x^3y\sin(xy/2) = f_{yx}(x,y)$.
$f_{yy}(x,y) = -x^4/4\sin(xy/2)$.
Also ist das quadratische Taylorpolynom um $(1,\pi)$

$$\begin{aligned} T_f(1+h,\pi+k) &= f(1,\pi) + hf_x(1,\pi) + kf_y(1,\pi) \\ &\quad +(1/2)[h^2 f_{xx}(1,\pi) + 2hkf_{xy}(1,\pi) + k^2 f_{yy}(1,\pi)] \\ &= 1 + 2h + (1-\pi^2/8)h^2 - (\pi/4)hk - (1/8)k^2 \end{aligned}$$

b) Berechnung der nötigen partiellen Ableitungen:
$g_x(x,y) = 2x + (1/y)\sin(x/y)$,
$g_y(x,y) = -x/y^2\sin(x/y)$
$g_{xx}(x,y) = 2 + (1/y^2)\cos(x/y)$
$g_{xy}(x,y) = -(1/y^2)\sin(x/y) - (x/y^3)\cos(x/y) = g_{yx}(x,y)$.
$g_{yy}(x,y) = (2x/y^3)\sin(x/y) + (x^2/y^4)\cos(x/y)$.
Also ist das quadratische Taylorpolynom um $(\pi,1)$

$$\begin{aligned} T_g(\pi+h,1+k) &= g(\pi,1) + hg_x(\pi,1) + kg_y(\pi,1) \\ &\quad +(1/2)[h^2 g_{xx}(\pi,1) + 2hkg_{xy}(\pi,1) + k^2 g_{yy}(\pi,1)] \\ &= \pi^2 + 1 + 2\pi h + (1/2)h^2 + \pi hk - (\pi^2/2)k^2 \end{aligned}$$

c) $f(1.1,\pi) = 1.1951....$
$T_f(1+0.1,\pi+0) = 1.2061...$
$g(\pi+0.1,0.8) = 11.1214...$
$T_g(\pi+0.1,1-0.2) = 11.6375...$

$f(1,4\pi) = 0$
$T_f(1,4\pi+0) = -10.1033...$
$g(0,1) = -1...$
$T_g(0,1) = -3,9348...$
Anhand dieser Rechnung wird offensichtlich, dass die Approximation durch das Taylorpolynom in der Regel nur in einer Umgebung des Entwicklungspunktes gut sein kann - auch wenn wir uns nur in einer Komponente entfernen.

Aufgabe H26 Taylorreihen (2+1 Punkte)

Stellen Sie für die folgenden Funktionen die Taylor**reihe** um den angegebenen Entwicklungspunkt auf. Nutzen Sie dazu bekannte Reihenentwicklungen. In Aufgabenteil a) ist die Lösung zusätzlich über die partiellen Ableitungen zu bestimmen.

(a) $f(x,y) := \frac{1}{xy}$ um $(1,1)$,

(b) $f(x,y) := e^{x+y-1}$ um $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$.

Lösung:

(a) i.

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{-1}{x^2y} \\ f_y(x,y) &= \frac{-1}{xy^2} \\ f_{xx}(x,y) &= \frac{2}{x^3y} \\ f_{yy}(x,y) &= \frac{2}{xy^3} \\ f_{xy}(x,y) &= \frac{1}{x^2y^2} \end{aligned}$$

Am Entwicklungspunkt $(1,1)$ erhalten wir somit:

$$f(1,1) = 1, \quad f_x(1,1) = -1, \quad f_y(1,1) = -1$$

$$f_{xx}(1,1) = 2, \quad f_{yy}(1,1) = 2, \quad f_{xy}(1,1) = 1.$$

Man sieht, dass durch x bzw. y am Punkt $(1,1)$ kein Einfluss auf den Wert der partiellen Ableitung genommen wird, dieser hängt nur von den entsprechenden Fakultäten aus der Ableitung der Potenzen und den Vorzeichen ab. Es ergibt sich ganz allgemein:

$$\partial_x^n \partial_y^k f(x,y) = (-1)^{k+n} n!k!$$

Die Taylor-Reihe am Entwicklungspunkt $(1,1)$ ergibt sich zu

$$Tf(x,y) = \sum_{n,k=0}^{\infty} \frac{\partial_x^n \partial_y^k f(x,y)}{n!k!}(x-1)^n(y-1)^k = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{n+k}(x-1)^n(y-1)^k.$$

ii. Es gilt für $|x-1| < 1$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{1-(1-x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(1-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n,$$

analog für y. Also ergibt sich

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{x}\frac{1}{y} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{n+k}(x-1)^n(y-1)^k.$$

Man sieht, dass der Aufwand wesentlich geringer ist, als unter Verwendung der partiellen Ableitungen (sofern die gebräuchlichen Reihen bekannt sind), die in diesem Fall sogar sehr einfach zu bestimmen waren .

(b) Wir gehen ähnlich wie oben vor, verwenden nun aber die bekannte Reihendarstellung der Exponentialfunktion. So ergibt sich zunächst

$$e^{x-\frac{1}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-\frac{1}{3})^n}{n!},$$

und insgesamt

$$e^{x+y-1} = e^{x-\frac{1}{3}} e^{y-\frac{2}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-\frac{1}{3})^n}{n!}\frac{(y-\frac{2}{3})^k}{k!}.$$