Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. U. Reif
R. Hartmann

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 10
24.05.2010

6. Übungsblatt zur „Mathematik II für MB“

Aufgabe 19 Jakobi-Matrix

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

(a) $f : R^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (xy, \cosh(xy), \log(1 + x^2))$

(b) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $g(x, y, z) = (x \sin(y) \cos(z), x \sin(y) \sin(z), x \cos(y))$

(c) $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $H(x, y) = \nabla h(x, y)$, mit
$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x, y) = xy + 2x \sin(y + \pi/2) + \exp(-y) \cos(x)$.

Lösung:

(a)

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ y\sinh(xy) & x\sinh(xy) \\ \frac{2x}{1+x^2} & 0 \end{pmatrix}$$

(b)

$$Dg(x,y,z) = \begin{pmatrix} \sin(y)\cos(z) & x\cos(y)\cos(z) & -x\sin(y)\sin(z) \\ \sin(y)\sin(z) & x\cos(y)\sin(z) & x\sin(y)\cos(z) \\ \cos(y) & -\sin(y)x & 0 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\nabla h(x,y) = (y + 2\sin(y+\pi/2) - \exp(-y)\sin(x), x + 2x\cos(y+\pi/2) - \exp(-y)\cos(x))$$

$$DH(x,y) = \begin{pmatrix} -\exp(-y)\cos(x) & 1 + 2\cos(y+\pi/2) + \exp(-y)\sin(x) \\ 1 + 2\cos(y+\pi/2) + \exp(-y)\sin(x) & -2x\sin(y+\pi/2) + \exp(-y)\cos(x) \end{pmatrix}$$

Aufgabe 20 Kettenregel

Es seien die Funktionen f, h, G gegeben durch

$$\begin{aligned} f(x,y) &= -x^2 + 2xy - y^3 && (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ G(\varphi) &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} && \varphi \in \mathbb{R} \\ h(\varphi) &= f(G(\varphi)) && \varphi \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

a) Geben Sie die partiellen Ableitungen f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy} an.
Stimmen f_{xy} und f_{yx} überein?
b) Bestimmen Sie die erste Ableitung von h mit der Kettenregel.
c) Bestimmen Sie $h'(\varphi)$ direkt.

Lösung:
a)

$$f_x = -2x + 2y, f_y = 2x - 3y^2, f_{xx} = -2, f_{xy} = 2 = f_{yx}, f_{yy} = -6y$$

Die gemischten partiellen Ableitungen sind gleich.
b)

$$\begin{aligned} h'(\varphi) &= \nabla f(G(\varphi))G'(\varphi) \\ &= (-2\cos(\varphi) + 2\sin(\varphi), 2\cos(\varphi) - 3\sin^2(\varphi))(-\sin(\varphi), \cos(\varphi))^T \\ &= 2(\cos(\varphi)\sin(\varphi) - \sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)) - 3\cos(\varphi)\sin^2(\varphi) \end{aligned}$$

c)

$$h(\varphi) = -\cos^2(\varphi) + 2\cos(\varphi)\sin(\varphi) - \sin^3(\varphi)$$

Daraus ergibt sich $h'(\varphi)$ wie in b).

Aufgabe 21 Richtungsableitung
Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x, y) = xy + 2x\sin(y + \pi/2) + \exp(-y)\cos(x).$$

a) Bestimmen Sie den Gradienten $\nabla f(X_0)$ von f an der Stelle $X_0 = (0, 0)$.
b) Berechnen Sie die Richtungsableitung $\nabla_A f(X_0)$ in der Richtung A, die durch den Vektor $(-3/\sqrt{10}, 1/\sqrt{10})$ gegeben ist.
c) Für welche Richtungen verschwindet $\nabla_B f(X_0)$, d.h. wann gilt $\nabla f(X_0)B = 0$?

Lösung: a)
$f_x(x, y) = y + 2\sin(y + \pi/2) - \exp(-y)\sin(x)$,
$f_y(x, y) = x + 2x\cos(y + \pi/2) - \exp(-y)\cos(x)$.
$\nabla f(0, 0) = (f_x(0, 0), f_y(0, 0)) = (2, -1)$.
b)
Zur Bestimmung der Richtungsableitung bildet man das Skalarprodukt $\langle A, \nabla f(0, 0)\rangle = -7/\sqrt{10}$.
c) Gesucht sind alle B mit $\langle B, \nabla f(0, 0)\rangle = 0$, also $2b_1 - b_2 = 0$, d.h. $b_2 = 2b_1$. Mit der Normierungsbedingung $b_1^2 + b_2^2 = 1$ erhält man $B_1 = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$, $B_2 = (-1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$.

Aufgabe 22 Differenzierbarkeit
Sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Bestimmen Sie alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, an welchen h differenzierbar ist.

Lösung: Für $(x, y) \neq (0, 0)$ gilt

$$\partial_1 h(x, y) = \frac{3x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x^4}{\sqrt{x^2 + y^2}^3}$$

und

$$\partial_2 h(x, y) = \frac{-x^3 y}{\sqrt{x^2 + y^2}^3}.$$

Da für $(x, y) \neq (0, 0)$ die partiellen Ableitungen stetig sind, ist f dort differenzierbar.

Für $(x, y) = (0, 0)$ gilt

$$\partial_1 h(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{h(t,0) - h(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t^3}{\sqrt{t^2}} = 0$$

sowie

$$\partial_2 h(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{h(0,t) - h(0,0)}{t} = \frac{0}{t} = 0.$$

Also wäre ein potentieller Kandidat für die Ableitung von h in $(0, 0)$ der Vektor $(0, 0)$. Da

$$\frac{h(x,y) - h(0,0) - \langle (0,0), (x,y) \rangle}{\|(x,y)\|} = \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + y^2}} \to 0 \qquad \text{für } (x,y) \to (0,0)$$

ergibt sich, dass h tatsächlich differenzierbar ist in $(0, 0)$. Es folgt, dass h in jedem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ differenzierbar ist. $\square$

Hausübung

Aufgabe H21 Gradient (1+2 Punkte)

Für $x \neq 0$ sei $f(x,y) = \arctan(y/x)$.
i) Bestimmen Sie den Gradienten $\nabla f(x,y)$.
ii) Zeigen Sie: Falls $x \neq 0$ folgt $\|\nabla f(x,y)\| = 1/\|(x,y)\|$ und $|xf_x(x,y) + yf_y(x,y)| \leq 1$.

Lösung: i)

$$\nabla f(x,y) = (-y/(x^2+y^2), x/(x^2+y^2))^T$$

ii)

$$\|\nabla f(x,y)\|^2 = 1/(x^2+y^2) = 1/\|(x,y)\|^2$$

$$|xf_x(x,y) + yf_y(x,y)| = |\nabla f(x,y)(x,y)^T| \leq \|(x,y)\| \, \|\nabla f(x,y)\| = 1$$

Aufgabe H22 Kettenregel II (1+1+2 Punkte)

(a) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = e^z y + x^2 y^2$ and $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $g(t) = (2t^2, \sin t, e^t)$. Berechnen Sie die Ableitung von $f \circ g$ auf zwei verschiedene Arten:

i. Direkt durch Berechnung von $h(t) = f(g(t))$ und Differenzieren von h.

ii. Durch Anwenden der Kettenregel.

(b) Betrachten Sie die Abbildung $h : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $h(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}}$

Berechnen Sie den Gradienten von h, in dem Sie h darstellen als Verkettung von Funktionen, deren Ableitung Sie bereits kennen.

Lösung:
a)
(i): Es gilt

$$h(t) = e^{e^t} \sin t + 4t^4 (\sin t)^2.$$

Daher

$$h'(t) = e^{e^t}(e^t \sin t + \cos t) + 16t^3 (\sin t)^2 + 8t^4 \sin t \cos t.$$

(ii): Die Ableitungen von f und g sind gegeben durch

$$Df(x,y,z) = (2xy^2, e^z + 2x^2 y, ye^z)$$

sowie

$$Dg(t) = (4t, \cos t, e^t).$$

Also gilt nach der Kettenregel

$$\begin{aligned} h'(t) &= Df(g(t))Dg(t) \\ &= 4t^2(\sin t)^2 4t + (e^{e^t} + 8t^4 \sin t)\cos t + \sin t (e^{e^t})e^t \\ &= e^{e^t}(e^t \sin t + \cos t) + 16t^3(\sin t)^2 + 8t^4 \sin t \cos t. \end{aligned}$$

b)
Es gilt: $h(X) = h(x_1, ..., x_2) = h_1(h_2(X))$ mit $h_1(x) = \frac{1}{x}$, $h_2(X) = \|X\|$. Es ergibt sich nach Vorlesung und Kettenregel

$$\begin{aligned}\nabla h(X) &= Dh(X)\\ &= Dh_1(h_2(X))Dh_2(X)\\ &= -\frac{1}{\|X\|^2}\cdot\frac{X^T}{\|X\|}\end{aligned}$$

Aufgabe H23 Differenzierbarkeit II (2+2+2 Punkte)

Sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}, & \text{falls } \ y>0,\\ -\sqrt{x^2+y^2}, & \text{falls } \ y<0,\\ x, & \text{falls } y=0.\end{cases}$$

(i) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix $Df(x,y)$ für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ mit $y\neq 0$.

(ii) Bestimmen Sie alle $v\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ für die die Richtungsableitung $\nabla_v f(0,0)$ existiert.

(iii) Ist f differenzierbar in $(0,0)$?

Lösung:

(i) Für $y\neq 0$ gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left[\sqrt{x^2+y^2}\right] &= \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-1/2}\cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\\ \frac{\partial}{\partial y}\left[\sqrt{x^2+y^2}\right] &= \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-1/2}\cdot 2y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.\end{aligned}$$

Also,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{falls } y>0,\\ -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{falls } y<0,\end{cases}$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{falls } y>0,\\ -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{falls } y<0.\end{cases}$$

Es folgt, dass

$$Df(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}f(x,y),\ \frac{\partial}{\partial y}f(x,y)\right).$$

(ii) Wir zeigen, dass die Richtungsableitung $\nabla_v f(0,0)$ für alle Richtungen $v\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ existiert. Sei dazu $v:=(v_1,v_2)\neq(0,0)\in\mathbb{R}^2$ und $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

– $v_2=0$. Dann gilt

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(tv_1,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{tv_1}{t} = v_1.$$

– $v_2\neq 0$. Dann ergibt sich

$$\frac{f(tv_1,tv_2)-f(0,0)}{t} = \begin{cases}\frac{\sqrt{t^2v_1^2+t^2v_2^2}}{t} = \sqrt{v_1^2+v_2^2}, & \text{falls } t>0,\ v_2>0,\\ -\frac{\sqrt{t^2v_1^2+t^2v_2^2}}{t} = \sqrt{v_1^2+v_2^2}, & \text{falls } t<0,\ v_2>0,\\ -\frac{\sqrt{t^2v_1^2+t^2v_2^2}}{t} = -\sqrt{v_1^2+v_2^2}, & \text{falls } t>0,\ v_2<0,\\ \frac{\sqrt{t^2v_1^2+t^2v_2^2}}{t} = -\sqrt{v_1^2+v_2^2}, & \text{falls } t<0,\ v_2<0.\end{cases}$$

Es folgt

$$\nabla_v f(0,0) = \begin{cases} \sqrt{v_1^2 + v_2^2}, & \text{falls } v_2 > 0, \\ -\sqrt{v_1^2 + v_2^2}, & \text{falls } v_2 < 0, \\ v_1, & \text{falls } v_2 = 0. \end{cases}$$

(iii) Angenommen, f wäre differenzierbar in $(0,0)$. Dann müsste gelten $Df(0,0) = (\nabla_{e_1} f(0,0), \nabla_{e_2} f(0,0)) = (1,1)$, nach (ii). Andererseits, wenn wir $h_n := \left(\frac{(-1)^n}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$ betrachten, dann ist (h_n) eine Nullfolge in $\mathbb{R}^2$ und

$$\frac{f(h_n) - f(0,0) - \langle (1,1), h_n \rangle}{\|h_n\|} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} - 0 - \frac{1}{n}((-1)^n + 1)}{\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}}} = 1 - \frac{(-1)^n + 1}{\sqrt{2}}.$$

Da der Grenzwert $n \to \infty$ nicht existiert, erhalten wir einen Widerspruch zur Definition.