Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. U. Reif
R. Hartmann

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 10
17.05.2010

5. Übungsblatt zur „Mathematik II für MB“

Aufgabe 16 Folgen im $\mathbb{R}^2$

Wir betrachten die folgenden Folgen in $\mathbb{R}^2$:

$$a_n = (n,\ \frac{1}{n})^T,\ b_n = (\frac{1}{n^2},\ \frac{n}{1+n})^T,\ c_n = (\frac{1}{n^2},\ \frac{1}{n^2})^T,\ d_n = (\sin(\frac{n\pi}{4}),\ \cos(\frac{n\pi}{4}))^T.$$

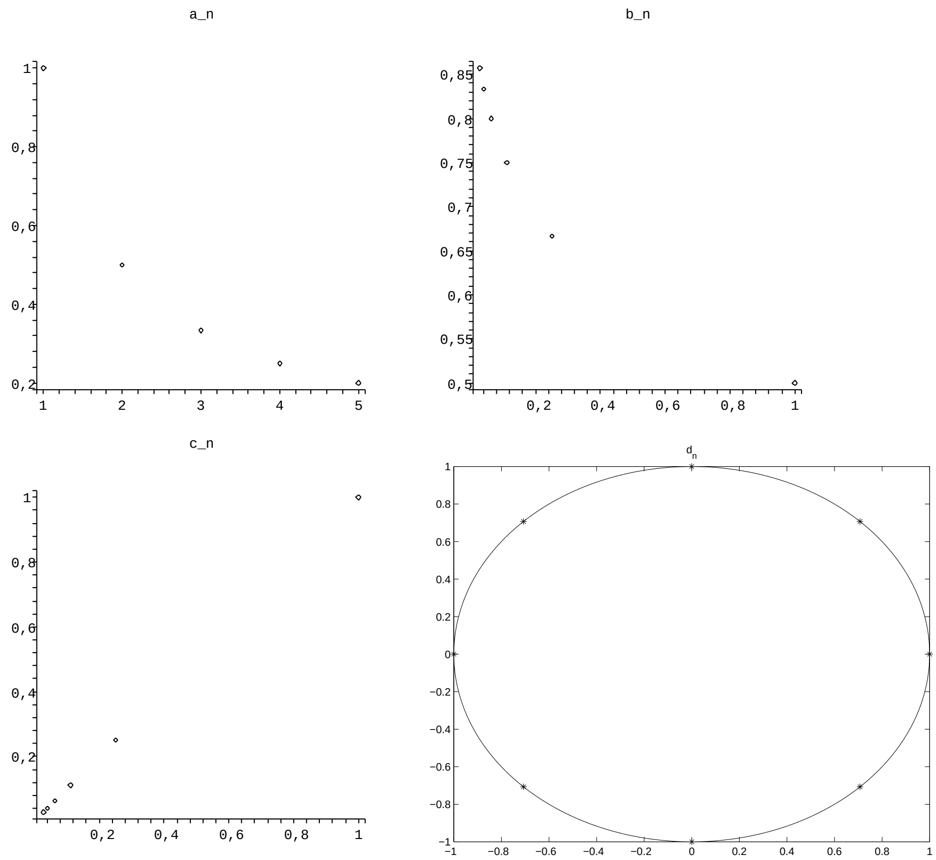
(a) Skizzieren Sie diese Folgen und entscheiden Sie, welche von ihnen beschränkt sind.

(b) Welche dieser Folgen sind konvergent, welche nicht? Was ist gegebenenfalls der Grenzwert?

(c) Geben Sie vier weitere Nullfolgen in $\mathbb{R}^2$ an.

Lösung:

(a)



Die Folge (a_n) ist nicht beschränkt, denn es gilt

$$\|a_n\| = \sqrt{n^2 + \frac{1}{n^2}} \geq \sqrt{n^2} = n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Die Folgen $(b_n), (c_n)$ und (d_n) sind beschränkt, denn

$$\begin{aligned}
\|b_n\| &= \sqrt{\frac{1}{n^4} + \frac{n^2}{(1+n)^2}} \leq \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\
\|c_n\| &= \sqrt{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = \frac{\sqrt{2}}{n^2} \leq \sqrt{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\
\|d_n\| &= \sqrt{\cos^2(\frac{n\pi}{4}) + \sin^2(\frac{n\pi}{4})} = \sqrt{1} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

(b) (a_n) ist nicht beschränkt, also auch nicht konvergent.
(b_n) konvergiert gegen $\binom{0}{1}$.
(c_n) konvergiert gegen $\binom{0}{0}$ (Nullfolge).
(Die Koordinatenfolgen konvergieren)
(d_n) konvergiert nicht. Begründung: Eine Teilfolge der ersten Komponente: $(d_1^{(4n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ist $-1, 1, -1, 1, \ldots$. Diese ist bekanntermaßen nicht konvergent. Also kann auch $(d_1^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ und damit auch $(d^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergent sein.

(c) z.B.:

$$\begin{aligned}
e_n &= (0, \tfrac{1}{n})^T & f_n &= (\tfrac{1}{n}, 0)^T \\
g_n &= (\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n^2})^T & h_n &= (\sin(\ln(\tfrac{n}{n+1})), e^{-n})^T, \quad n \geq 1.
\end{aligned}$$

Aufgabe 17 Stetigkeit im $\mathbb{R}^2$
Sie haben die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vorliegen:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y = 0 \\ \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Sind die beiden Komponentenfunktionen

$$k_1(x) := f(x, 0), \quad k_2(y) := f(0, y)$$

stetig?

b) Ist f eine stetige Funktion? Falls ja: weisen Sie nach, dass dem so ist. Anderenfalls geben Sie explizit zwei Folgen $a_n = (x_n, y_n)$ und $b_n = (\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)$ aus $\mathbb{R}^2$ an, für die

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

aber

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(b_n)$$

ist.

Lösung:

a) Es sind

$$k_1(x) = 0, \quad k_2(y) := 0$$

konstante Funktionen und somit stetig.

b) Nicht stetig in $(0,0)$. Zum Beispiel betrachte die Folgen

$$a_n = (1/n, 0), \quad b_n = (1/n, 1/n).$$

Beide Folgen konvergieren gegen $(0,0)$, jedoch wegen $f(a_n) = 0$ und $f(b_n) = 1/2$ sind die Grenzwerte ihrer Funktionswerte voneinander verschieden.

Aufgabe 18 Lineare/quadratische Abbildungen

Sind die folgenden Abbildungen jeweils linear? Sind sie quadratische Funktionen? Falls ja, geben Sie diese in der im Skript 4.8 gegebenen Notation an. *Hinweis:* Sie dürfen benutzen, dass, falls die Funktionen nicht linear/quadratisch sind, sie sich nicht in der im Skript gegebenen Notation schreiben lassen. In diesem Fall müssen Sie jedoch erklären, weshalb das nicht möglich ist.

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = xy$.

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x,y) = (2y, x+y)^T$.

(c) $f(x,y) = 1 + x - y$.

Lösung:

(a) Es ist $f(1,1) = 1$, $f(2,2) = 4$.
Wäre f linear, müsste aber $f(2,2) = f(2 \cdot (1,1)) = 2 \cdot f(1,1) = 2$ gelten, also ist f nicht linear. Quadratische Abbildungen $f(x)$ lassen sich mit einer geeigneten Matrix A schreiben als

$$f(x) = x^T A x.$$

Für $f(x) = x_1 x_2$ sieht man leicht, dass hier $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ gewählt werden kann, also ist f quadratisch.

(b) Für alle (x_1, x_2),$(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} f(\lambda(x_1,x_2) + \mu(y_1,y_2)) &= f(\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2) \\ &= (2\lambda x_2 + 2\mu y_2, \lambda x_1 + \mu y_1 + \lambda x_2 + \mu y_2)^T \\ &= (2\lambda x_2, \lambda(x_1 + x_2))^T + (2\mu y_2, \mu(y_1 + y_2))^T \\ &= \lambda f(x_1, x_2) + \mu f(y_1, y_2) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow f$ ist linear

(c) Jede lineare Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lässt sich schreiben als $g(x,y) = (g_1, g_2)(x,y)^T$ (Hinweis). Insbesondere für $(x,y) = (0,0)$ folgt $g(0,0) = 0$. Es ist aber $f(0,0) = 1$. Analog folgt, dass f nicht quadratisch ist.

Hausübung

Aufgabe H17 Stetigkeit (1+2 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{\sin(x)y^2}{x^2 + y^4}$$

(a) Ist die Funktion f stetig?

(b) Ist sie stetig auf $\mathbb{R}^2$ fortsetzbar, d.h. gibt es eine stetige Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $F_{|\mathbb{R}^2\setminus\{0\}} = f$?

Lösung:

(a) Die Funktion f ist als Quotient stetiger Funktionen wieder stetig.

(b) Es gilt $\lim_{y\to 0} f(0,y) = 0 \neq \frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n^2})}{2\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n})$. Somit kann die Funktion f nicht stetig auf $\mathbb{R}^2$ fortgesetzt werden.

Aufgabe H18 Lineare Abbildungen II (3+2 Punkte)

Wir betrachten die linearen Abbildungen $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ und $\Psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$\Phi(x_1, x_2) = (x_2, x_1, 3x_1 - x_2)^T, \qquad \Psi(y_1, y_2, y_3) = y_2 + y_3 - y_1.$$

Bestimme die zu Φ, Ψ und $\Psi \circ \Phi$ gehörigen Matrizen. Wie hängen diese Matrizen zusammen?

Lösung: Merkregel: In den Spalten der Abbildungsmatrix stehen die Koordinaten der Bilder der Basisvektoren.
Hier also:
Für Φ Wir müssen $\Phi(e_1) = \Phi(1,0)$ und $\Phi(e_2) = \Phi(0,1)$ bestimmen:
$\Phi(1,0) = (0, 1, 3\cdot 1 - 0)^T = (0,1,3)^T$
$\Phi(0,1) = (1, 0, 3\cdot 0 - 1)^T = (1,0,-1)^T$,

also ist die Abbildungsmatrix von Φ: $\quad A_\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

Genau so:

$$\Psi(1,0,0) = -1, \qquad \Psi(0,1,0) = \Psi(0,0,1) = 1,$$

also

$$A_\Psi = (-1 \ \ 1 \ \ 1)$$

Nach Kapitel 10 (9) gilt nun

$$A_{\Psi\circ\Phi} = A_\Psi \cdot A_\Phi = (-1 \ \ 1 \ \ 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = (4 \quad -2)$$

Aufgabe H19 Definitionsbereich (3+0+1+1+∗ Punkte)

Geben Sie den maximalen Definitionsbereich folgender Funktionen an:

(a) $f(x,y) = \sin\frac{1}{xy}$.

(b) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + 2y^2 - 1}$.

(c) $f(x,y) = \frac{1}{\sin x \cdot \sin y}$.

Skizzieren Sie die Mengen auch. Ränder, welche nicht mehr im Definitionsbereich enthalten sind zeichnen Sie bitte gestrichelt ein.
(∗) *Freiwillige Zusatzaufgabe:* Visualisieren Sie die Funktionen mit Hilfe der MATLAB-Funktionen `mesh` und `surf`. Wenn Ihnen bei dieser oder einer anderen Aufgabe Punkte fehlen darf Ihr Tutor Ihnen für die Zusatzaufgabe bis zu zwei Punkte gewähren (nach Ermessen).

Lösung:

(a) Definitionsbereich: $\mathbb{R}\backslash\{(0,0),(0,y),(x,0)\}$,

(b) Definitionsbereich:

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \quad |x|\geq 1 \text{ oder } |y|\geq \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ oder } \left(|y|\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ und } |x|\geq \sqrt{1-2y^2}\right) \text{ oder } \left(|x|\leq 1 \text{ und } |y|\geq \sqrt{\frac{1-x^2}{2}}\}\right)\}.$$

(c) Definitionsbereich:$\mathbb{R}\backslash\{(0,0),(0,y),(x,0),(k\pi,y),(x,k\pi)\}$.

Aufgabe H20 Glockenkurve von Gauß (2+1+1 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$. (Der Graph dieser Funktion ist die bekannte Gaußsche Glockenkurve.)

a) Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_5 f(x)$ sowie die Taylorreihe für die Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ an.

b) Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion $F(x)=\int_0^x f(t)dt$. *Hinweis:* Dieses Integral besitzt keinen geschlossenen Ausdruck als Lösung.

c) Berechnen Sie mit Hilfe des Taylorpolynoms aus a) näherungsweise $F(1)$.

Lösung:

a) Die ersten vier Ableitungen von $g(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ sind

$$\begin{aligned} g^{(1)}(x) &= -xte^{-\frac{x^2}{2}}, \\ g^{(2)}(x) &= -e^{-\frac{x^2}{2}}+x^2e^{-\frac{x^2}{2}}, \\ g^{(3)}(x) &= 3xe^{-\frac{x^2}{2}}-x^3e^{-\frac{x^2}{2}}, \\ g^{(4)}(x) &= 3e^{-\frac{x^2}{2}}-6x^2e^{-\frac{x^2}{2}}+x^4e^{-\frac{x^2}{2}}. \end{aligned}$$

Also gilt

$$T_5(x,0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4\right).$$

Aus der Potenzreihendarstellung von e^z erhält man mit $z=-\frac{1}{2}x^2$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!2^n}\cdot x^{2n}.$$

b) Durch gliedweise Integration erhält man

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)2^n}\cdot x^{2n+1}.$$

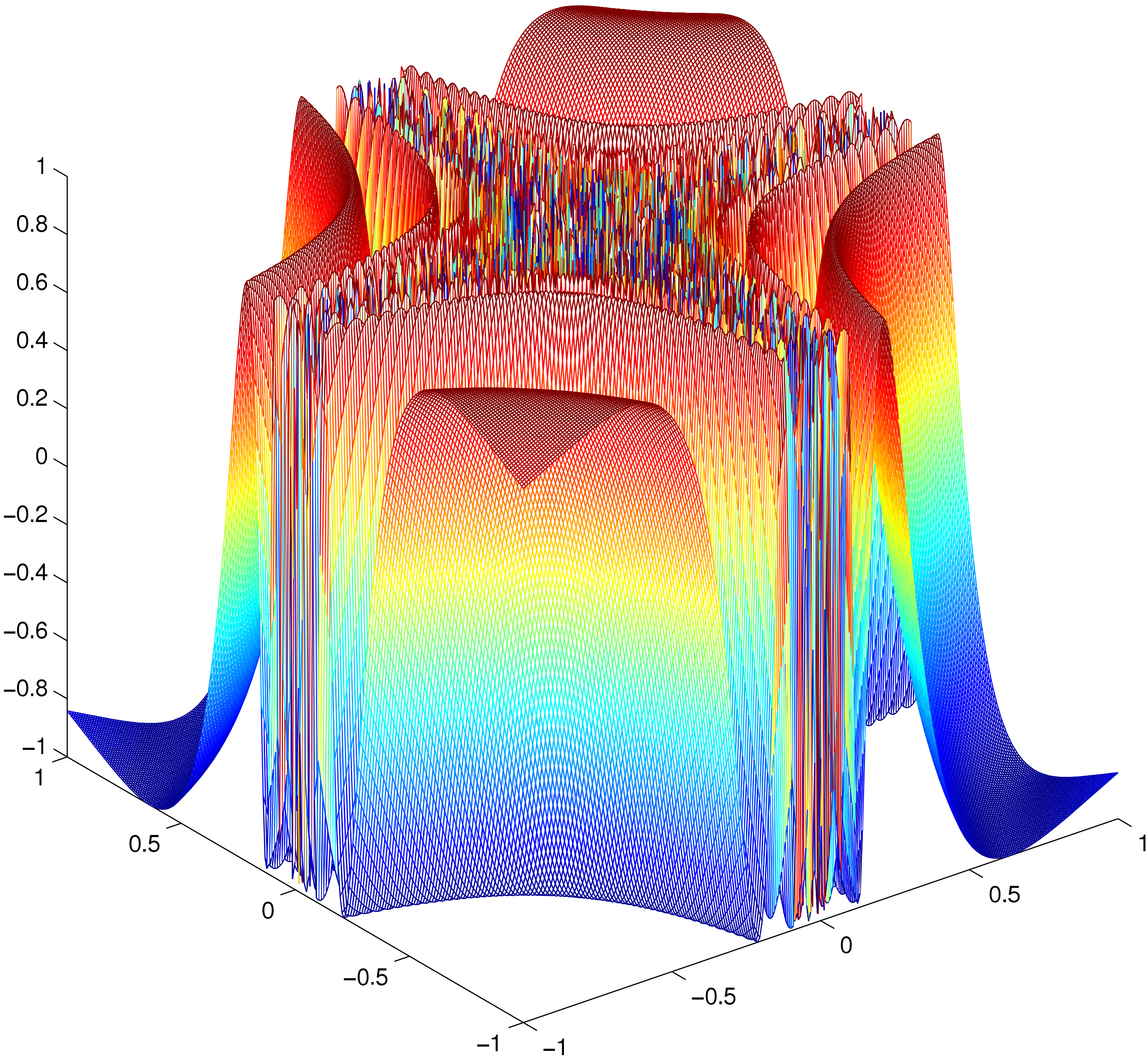


Abbildung 1: Die Funktion aus **H19** a). Gegen den Ursprung hin geht die Frequenz der Oszillationen gegen Unendlich.

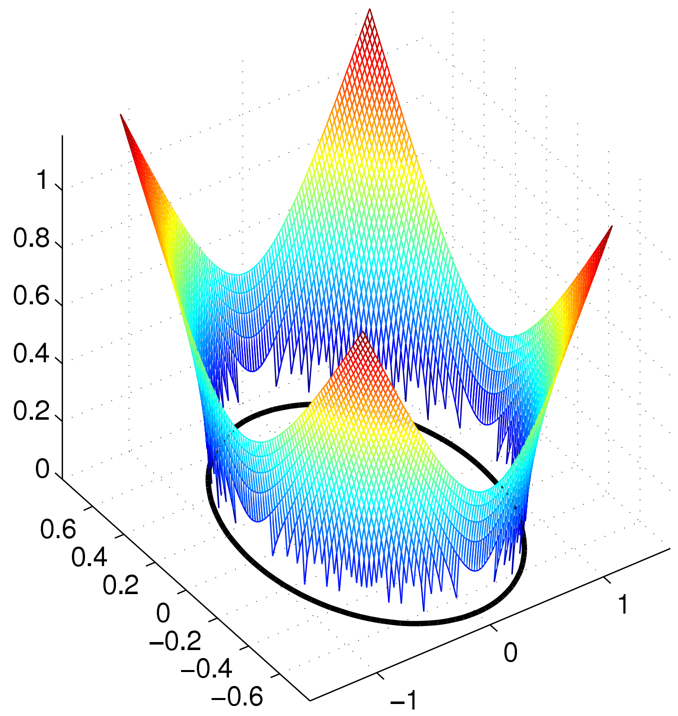


Abbildung 2: Die Funktion aus **H19** b). Der Kreis markiert den Rand des Definitionsgebiets.

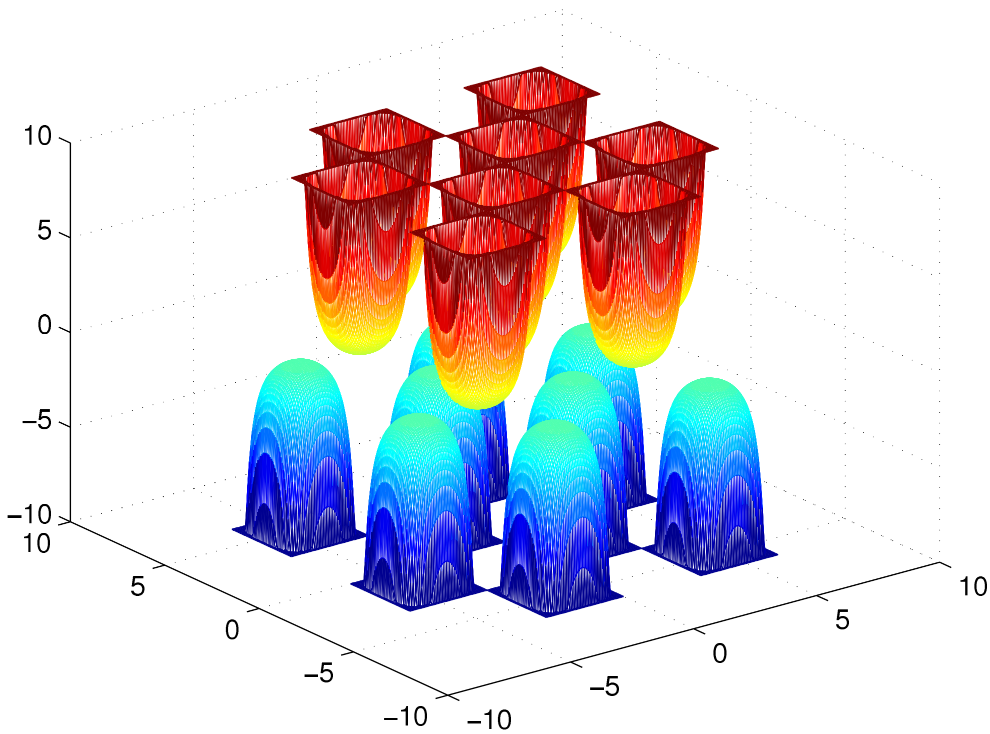


Abbildung 3: Die Funktion aus **H19** c), wobei die Funktionswerte bei ±10 abgeschnitten wurden.

c) Verwenden von $T_5(x, 0)$ ergibt

$$F(1) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{4} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)2^n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{103}{120}.$$