Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. U. Reif
R. Hartmann
J. Mehnert

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 10
10.05.2010

4. Übungsblatt zur „Mathematik II für MB“

Aufgabe 12 (Fourier-Entwicklung)
Betrachten Sie die Funktion $f(x) := |x|$ auf dem Intervall $[-\pi, \pi)$.

(a) Setzen Sie f stetig zu einer 2π-periodischen Funktion fort und skizzieren Sie diese Funktion. Wir bezeichnen auch die fortgesetzte Funktion mit f. Ist f gerade oder ungerade?

(b) Berechnen Sie die Fourierreihe Ff.

(c) Bestimmen Sie durch Einsetzen eines geeigneten Wertes in die Fourierreihe den Wert der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Lösung:

(a) Aus der Skizze in Abbildung 1 sieht man sofort, dass F eine gerade Funktion ist.

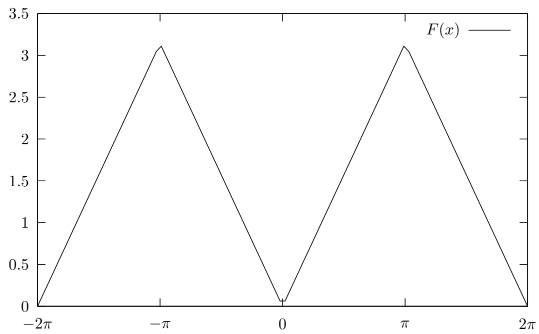


Abbildung 1:

(b) Weil f eine gerade Funktion ist, sind alle Sinus-Koeffizienten b_n Null. Wir müssen deshalb nur die Kosinus-Koeffizienten a_n berechnen. Für a_0 ergibt sich

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t|\, dt = \frac{1}{\pi} \cdot \pi^2 = \pi\ .$$

(Das auftretende Integral lässt sich auch leicht geometrisch bestimmen, weil die Fläche unter dem Graphen von f aus zwei gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreiecken mit Katetenlänge π besteht.) Weil f – und damit auch $f(t)\cos(nt)$ – eine gerade Funktion ist, gilt für die Koeffizienten a_n mit $n > 0$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\, dt = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(t)\cos(nt)\, dt = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} t\cos(nt)\, dt\ .$$

Für die zu integrierende Funktion $t\cos(nt)$ lässt sich mit partieller Integration eine Stammfunktion bestimmen:

$$\int t\cos(nt)\,dt = t\frac{\sin(nt)}{n} - \int \frac{\sin(nt)}{n}\,dt = \tfrac{1}{n}t\sin(nt) + \tfrac{1}{n^2}\cos(nt)\ .$$

Für a_n ergibt sich damit

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{n\pi}t\sin(nt) + \frac{2}{n^2\pi}\cos(nt)\Big|_0^\pi \\ &= \frac{2}{n\pi}\pi\sin(n\pi) + \frac{2}{n^2\pi}\cos(n\pi) - \frac{2}{n^2\pi} = \frac{2}{n^2\pi}\cdot(-1)^n - \frac{2}{n^2\pi} \end{aligned}$$

wegen $\sin(n\pi) = 0$ und $\cos(-n\pi) = \cos(n\pi) = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für jede gerade Zahl n gilt also $a_n = 0$ und für jede ungerade Zahl n gilt $a_n = \frac{-4}{n^2\pi}$. Die Fourierreihe von f ist damit

$$\begin{aligned} Ff(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos(nx) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}\cos\big((2n+1)x\big) \\ &= \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{(2n+1)^2\pi}\cos\big((2n+1)x\big)\ . \end{aligned}$$

(c) Da die Funktion f stetig und stückweise glatt ist, konvergiert die Fourierreihe gegen die Funktion, d.h. es gilt $Ff(x) = f(x)$ für alle $x \in [-\pi,\pi)$, insbesondere also für $x = 0$:

$$0 = f(0) = Ff(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\ .$$

Löst man nach dem Reihenwert auf, so erhält man $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

Aufgabe 13 (Periodische Funktionen)

i) Die Funktion $f(x) = \cos(4\pi x + 2)$ hat die Periode

☐ 4π ☐ 4 ☐ 2 ☐ $\frac{1}{4\pi}$ ☐ $\frac{1}{2}$.

ii) Die Fourier-Reihe einer geraden Funktionen ist eine

☐ reine Sinusreihe ☐ reine Kosinusreihe ☐ Reihe mit Sinus- und Kosinustermen .

iii) Ist f periodisch mit der Periode 2π und auf dem Intervall $[0,2\pi]$ stückweise stetig differenzierbar bis auf eine Unstetigkeitsstelle $x_0 \in (0,2\pi)$, so konvergiert ihre Fourier-Reihe in x_0 gegen

☐ $\lim\limits_{x\downarrow x_0} f(x)$ ☐ $\lim\limits_{x\uparrow x_0} f(x)$ ☐ $\frac{1}{2}\left\{\lim\limits_{x\downarrow x_0} f(x) + \lim\limits_{x\uparrow x_0} f(x)\right\}$ ☐ $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$.

Lösung:

i) $\frac{1}{2}$ ii) reine Kosinusreihe iii) $\frac{1}{2}\left\{\lim\limits_{x\downarrow x_0} f(x) + \lim\limits_{x\uparrow x_0} f(x)\right\}$

Aufgabe 14 (Fourier-Entwicklung)

Gegeben sei die 2π-periodische Funktion $\tilde{f} : [0,2\pi] \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x) = |\sin x|$. Skizzieren Sie f und bestimmen Sie die Fourier-Reihe.

Lösung: $f(x) = \frac{2}{\pi} - 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi(2n-1)(2n+1)}\cos(2nx)$.

Hausübung

Aufgabe H12 (Fourier-Entwicklung) (1+2+2 Punkte)

Betrachten Sie die 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ für alle $x \in [-\pi, \pi)$.

(a) Skizzieren Sie die Funktion auf dem Intervall $[-3\pi, 3\pi]$.

(b) Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten von f.

(c) Berechnen Sie mit Hilfe der Fourierreihe den Wert der alternierenden Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Lösung:

(a) Siehe Abbildung 2.

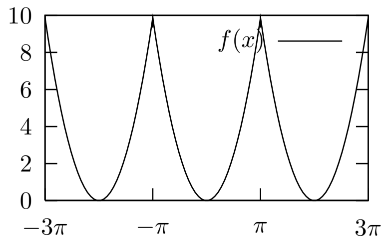


Abbildung 2:

(b) Die Funktion f ist gerade, d.h. $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Somit gilt $b_n = 0$ für die Sinus-Fourierkoeffizienten. Für den Koeffizienten a_0 erhalten wir

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t^2 \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 \, dt = \tfrac{2}{3}\pi^2$$

Für alle $n > 0$ gilt mit Hilfe partieller Integration

$$\int_0^{\pi} t^2 \cos(nt) = \underbrace{\left(t^2 \frac{\sin(nt)}{n}\right)\Big|_0^{\pi}}_{=0} - \frac{2}{n} \int_0^{\pi} t \sin(nt) \, dt = -\frac{2}{n}\left(\left(-t \frac{\cos(nt)}{n}\right)\Big|_0^{\pi} + \underbrace{\frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos(nt) \, dt}_{=0}\right)$$

$$= \frac{2\pi \cos(n\pi)}{n^2} - \underbrace{\left(\frac{2}{n^2} \frac{\sin(nt)}{n}\right)\Big|_0^{\pi}}_{=0} = (-1)^n \frac{2\pi}{n^2}$$

und somit

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} t^2 \cos(nt) \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 \cos(nt) \, dt = \frac{2}{\pi} \cdot (-1)^n \frac{2\pi}{n^2} = (-1)^n \frac{4}{n^2} .$$

(c) Da die Funktion f stetig ist, gilt insbesondere an der Stelle $x = 0$

$$0 = f(0) = FR(f)(0) = \tfrac{1}{3}\pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

und somit

$$-\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} .$$

Aufgabe H13 (Schaltkreis zum analogen Integrieren) (1+2+2 Punkte)

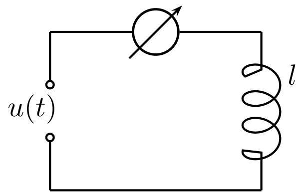
Experimentell wurden für Situationen wie die nachfolgende folgende Zusammenhänge zwischen Spannung und Stromstärke festgestellt:

1. $i(t)$ geht linear aus $u(t)$ hervor,
2. falls $u(t) = u_0 \cos \omega t$ dann ist $i(t) = \frac{u_0}{\omega l} \sin \omega t$ für alle $\omega \in \mathbb{R}$.

Der nun zu untersuchende Schaltkreis besteht aus einer Spannungsquelle mit zeitabhängiger Spannung $u(t)$, einem Strommessgerät und einer Spule mit der Induktivität l. Es sei $i(t)$ die gemessene Stromstärke (siehe Skizze).

Gegeben sei der L-periodische Spannungsverlauf

$$u(t) = \begin{cases} u_0, & |t| \leq \frac{L}{4} \\ -u_0, & \frac{L}{4} < |t| \leq \frac{L}{2} \end{cases}$$



(a) Skizzieren Sie $u(t)$ und entwickeln Sie es anschließend in eine Fourier-Reihe. *Tip:* Im Skript finden Sie unter 2.8 Hinweise zum Vorgehen bei von 2π-verschiedener Periode.

(b) Geben Sie $i(t)$ in einer Fourierdarstellung an. Benutzen Sie dabei den vorangehenden Aufgabenteil und Zusammenhang 2., indem Sie die Fourierreihe vorher mittels 1. in geeignete Summanden zerlegt haben.

(c) Seien ab nun $u_0 = 240V$, $l = 10mH$ und $L = 1ms$. Geben Sie für diesen Fall die Fourier-Reihe von $u(t)$ und $i(t)$ an.

(d) *Freiwillige Zusatzaufgabe:* Skizzieren Sie $i(t)$ aus dem vorherigen Aufgabenteil näherungsweise (das heisst, brechen Sie die Fourierreihe nach einer endlichen Anzahl Summanden ab). Verwenden Sie hierzu einen Computer!

Lösung:

(a) $u(t) = \frac{4u_0}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} \cos((2n+1)\frac{2\pi}{L}t)$

(b) $i(t) = \frac{2Lu_0}{\pi^2 l} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2} \sin((2n+1)\frac{2\pi}{L}t)$

(c) $u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{960}{\pi}(-1)^{n+1} \frac{1}{2n+1} \cos((2n+1)\frac{2\pi}{L}t)$ und
$i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{48}{\pi^2}(-1)^{n+1} \frac{1}{(2n+1)^2} \sin((2n+1)\frac{2\pi}{L}t)$

(d) siehe Abb.1

Aufgabe H14 (Fourier-Entwicklung) (4x1 Punkte)

Die 2π-periodische Funktion f sei durch die folgende Skizze gegeben.

i) Skizzieren Sie die Funktion $\tilde{f}(x) = f(x) - \frac{\pi}{2}$.

ii) Welche Symmetrieeigenschaften hat die Funktion $\tilde{f}$?

iii) Bestimmen Sie die Fourier-Reihe der Funktion $\tilde{f}$.

iv) Bestimmen Sie die Fourier-Reihe der Funktion f mit Hilfe Ihres Resultats aus iii).

Lösung:

ii) $\tilde{f}$ ist ungerade.

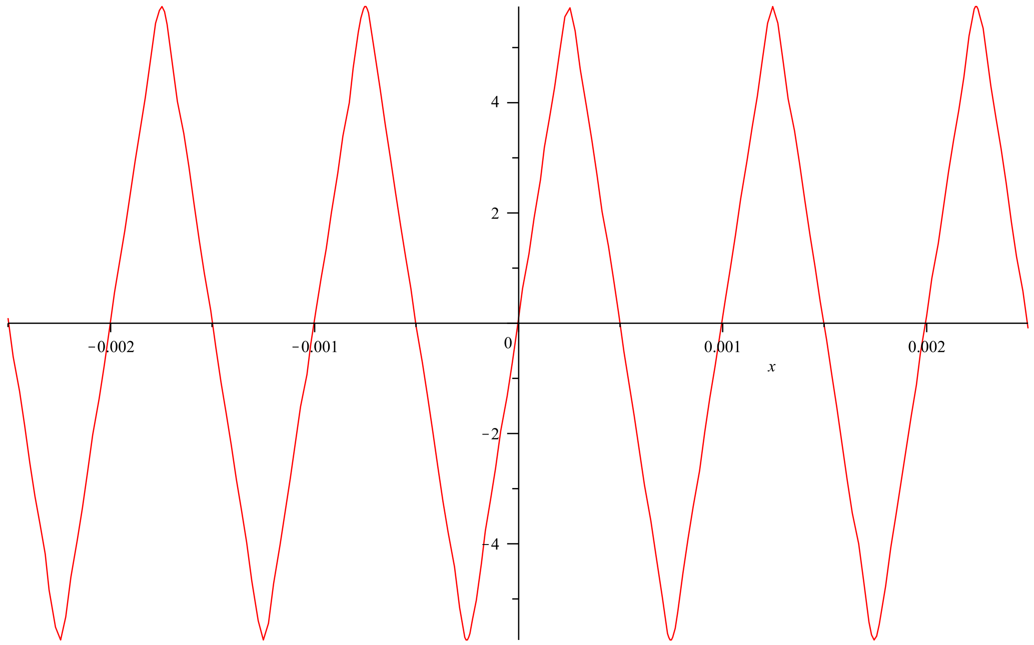
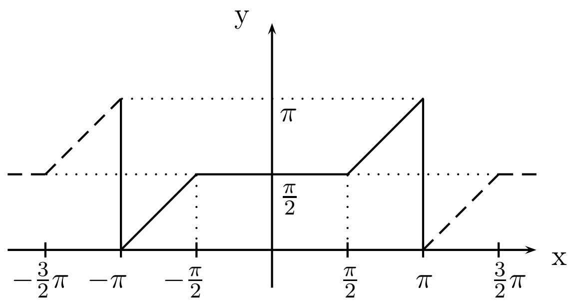


Abbildung 3: H24 Stromstärke



iii) $\tilde{f} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ mit

$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{n} - \frac{2}{\pi n^2}, & \text{für } n = 4k+1 \\ -\frac{1}{n}, & \text{für } n = 4k+2 \\ \frac{1}{n} + \frac{2}{\pi n^2}, & \text{für } n = 4k+3 \\ -\frac{1}{n}, & \text{für } n = 4k+4 \end{cases} \quad , \ k = 0, 1, 2, \ldots$$

iv) $f = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ mit b_n wie oben

Aufgabe H15 (Fourier-Entwicklung) (1+1 Punkte)

Bestimmen Sie (mit höchstens vier Zeilen Rechnung) die Fourier-Reihen der Funktionen

$$f(x) = \sin^2 x, \quad g(x) = \cos^2 x, \quad x \in \mathbb{R} \ .$$

Hinweis: Es gelten $\sin^2 + \cos^2 = 1$ und $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$.

Lösung:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$$

$\cos^2 x$ ist 2π-periodisch, $a_0 = 1,\ b_n = 0\ \forall n,\ a_1 = 0,\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = 0,\ \ldots$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$$

$\sin^2 x$ ist 2π-periodisch, $a_0 = 1,\ b_n = 0\ \forall n,\ a_1 = 0,\ a_2 = -\frac{1}{2},\ a_3 = 0,\ \ldots$