Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. U. Reif
R. Hartmann
J. Mehnert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 10
03.05.2010

3. Übungsblatt zur „Mathematik II für MB“

Aufgabe 8 (Taylorentwicklung)

Bestimmen Sie jeweils die Taylorreihe von f im Entwicklungspunkt x_0:

i) $f(x) = (x-1)^3 - x^2 + 2x - 1$ mit $x_0 = 1$,

ii) $f(x) := \frac{1}{1-x^4}$ mit $x_0 = 0$,

iii) $f(x) := e^{2(5-x)^3}$ mit $x_0 = 5$,

iv) $f(x) := \sin(2x-\pi) + \cos\big((x-\frac{1}{2}\pi)^3\big)$ mit $x_0 = \frac{1}{2}\pi$.

Lösung:

(a) Die Funktion f ist bereits ein Polynom, die Taylorreihe Tf ist somit f selbst.

Von den Studenten wird nicht erwartet, die Koeffizienten explizit anzugeben. Wegen $f(x) = (x-1)^3 - (x-1)^2$ ist dies allerdings auch leicht möglich: Mit

$$a_0 = a_1 = 0 \,, \qquad a_2 = -1 \,, \qquad a_3 = 1$$

und $a_n = 0$ für alle $n > 3$ ist die Taylorreihe durch $f(x) = Tf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$ gegeben.

(b) Für $-1 < q < 1$ gilt $\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$. Somit ergibt sich für die Funktion f mit $q = x^4$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (x^4)^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{4n} \,.$$

Aufgrund der Eindeutigkeit der Taylorreihe ist diese Reihe auch tatsächlich die Taylorreihe.

(c) Für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt $e^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$. Für die Funktion f deshalb mit $y = 2(5-x)^3$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\big(2(5-x)^3\big)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(-1)^n}{n!}(x-5)^{3n} \,.$$

Aufgrund der Eindeutigkeit der Taylorreihe ist diese Reihe auch tatsächlich die Taylorreihe.

(d) Für alle $u, v \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sin u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} u^{2n+1} \,, \qquad \cos v = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} v^{2n} \,.$$

Mit $u = 2x - \pi$ und $v = (x - \frac{1}{2}\pi)^3$ ergibt sich daraus für die Funktion f

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(2x-\pi)^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(x-\tfrac{1}{2}\pi)^{6n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n+1}}{(2n+1)!}(x-\tfrac{1}{2})^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(x-\tfrac{1}{2})^{6n} \,. \end{aligned}$$

Aufgrund der Eindeutigkeit der Taylorreihe ist diese Reihe auch tatsächlich die Taylorreihe. Von den Studenten wird nicht erwartet, die Reihe weiter zusammenzufassen oder nach den Potenzen zu ordnen.

Aufgabe 9 (Taylorentwicklung)

Berechnen Sie die Taylorpolynome durch Verwendung bekannter Taylorreihen:

$$\text{i)}\quad T_7\left(\frac{\ln(x+1)}{x^2+1}\right) \qquad \text{mit } x_0 = 0 \qquad \text{ii)}\quad T_3(\sin(\ln(x+1))) \qquad \text{mit } x_0 = 0\ .$$

Lösung: (i) $T_7(x) = x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{13}{15}x^5 - \frac{5}{12}x^6 - \frac{76}{105}$

(ii) $T_3(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$

Aufgabe 10 (Taylorentwicklung eines Integrales)

Sei $f(x) = \frac{1}{1-x}$ mit $I_f = (-1, 1)$. Bestimmen Sie $T_{1000}(F(x))$ der in $(-1, 1)$ definierten Funktion

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt \quad \text{um } x_0 = 0\ .$$

Lösung: Es gilt unter Nutzung der Vertauschungssätze für Funktionenfolgen:

$$\begin{aligned}\int_0^x f(t)dt &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}\end{aligned}$$

Aufgabe 11 (Landausymbole)

Bestimmen Sie jeweils das größte $\alpha \in \mathbb{N}$, sodass die folgenden Gleichungen gelten:

$$\begin{aligned}&\text{i)}\quad \sqrt{1+x} = O(x^\alpha) &&\text{ii)}\quad \sin x = O(x^\alpha) \\ &\text{iii)}\quad \tan x = O(x^\alpha) &&\text{iv)}\quad e^{(x^7)} - e^0 = O(x^\alpha)\ .\end{aligned}$$

Lösung:

i) $\sqrt{1+x} = O(x^0)$ ii) $\sin x = O(x^1)$ iii) $\tan x = O(x^1)$ iv) $e^{(x^7)} - e^0 = O(x^7)$

Hausübung

Aufgabe H8 (Taylorentwicklung I) (1+2 Punkte)

Berechnen Sie die Taylorpolynome durch Verwendung bekannter Taylorreihen:

$$\text{i)}\quad T_5(\frac{1}{\cos x}) \text{ mit } x_0 = 0 \qquad \text{ii)}\quad T_3(e^{\sin x}) \text{ mit } x_0 = 0 \qquad T_4(\cos(\ln(1+x))) \text{ mit } x_0 = 0 \ .$$

Lösung:

$$\text{i)}\quad T_5(\frac{1}{\cos x}) = 1+\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4+\ldots \qquad \text{ii)}\quad T_3(e^{\sin x}) = 1+x+\frac{x^2}{2} \qquad \text{iii)}\quad T_4(\cos(\ln(1+x))) = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+\ldots$$

Aufgabe H9 (Taylorentwicklung eines Integrales) (2 Punkte)

Sei $f(t) = e^{-t^2}$. Bestimmen Sie $T_6F(x)$ der Funktion

$$F(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt \quad \text{um } x_0 = 0 \ .$$

Lösung:

$$T_5F(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5$$

Aufgabe H10 (Taylorentwicklung und Extrema) (2+2 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \ln(1+x^2) + \cos(\alpha x)$$

mit einem reellen Parameter α.

i) Berechnen Sie $T_5(f(x))$ an der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$.

ii) Untersuchen Sie f in x_0 auf ein lokales Extremum in Abhängigkeit von α. Unterscheiden Sie dabei für α drei Fälle!

Lösung:

i) $T_5(f(x)) = 1 + (1 - \frac{\alpha^2}{2}x^2 - (\frac{1}{2} - \frac{\alpha^4}{4!}x^4$

ii) $f(0)' = 0 \quad \Rightarrow f$ besitzt Extremum für $x = 0$

$(1 - \frac{\alpha^2}{2}) > 0$: f besitzt in $x = 0$ lok. Minimum

$(1 - \frac{\alpha^2}{2}) < 0$: f besitzt in $x = 0$ lok. Maximum

$(1 - \frac{\alpha^2}{2}) = 0$: Für $\alpha = \pm\sqrt{2}$ gilt $-(\frac{1}{2} - \frac{\alpha^4}{4!}) = -\frac{1}{3} < 0 \quad \Rightarrow f$ besitzt in $x = 0$ ein lok. Maximum

Aufgabe H11 (Bestimmung von Grenzwerten) (4x1 Punkte)

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte ohne Verwendung der Regel von l'Hospital:

i) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$, ii) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)-1}{3\sin^2 x}$, iii) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{\ln(1+x^3)}$.

iv) $\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot\sinh x - x^2}{x^4}$

Berechnen Sie zum Vergleich den vorletzten Grenzwert mit der Regel von L'Hospital.

Lösung:

(a) Mit $\sin(x) = x + O(x^3)$ ergibt sich

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x + O(x^3)}{x} = \lim_{x\to 0} \big(1 + O(x^2)\big) = 1\ .$$

(b) Mit $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + O(x^4)$ und $\sin(x) = x + O(x^3)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x) - 1}{3\sin^2 x} &= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}(2x)^2 + O(x^4)}{3\big(x + O(x^3)\big)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x^2 + O(x^4)}{3x^2 + O(x^4)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-2 + O(x^2)}{3 + O(x^2)} = \frac{-2+0}{3+0} = -{}^2\!/_3\ .\end{aligned}$$

(c) Mit $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + O(x^5)$ und $\ln(1 - x) = -x + O(x^2)$ ergibt sich

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{\ln(1 + x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6}x^3 + O(x^5)}{x^3 + O(x^6)} = \lim_{x\to 0} \frac{1/6 + O(x^2)}{1 + O(x^3)} = \frac{1/6 + 0}{1 + 0} = 1/6\ .$$

(d) Mit $\sinh x = x + \frac{1}{6}x^3 + O(x^5)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{x \sinh x - x^2}{x^4} &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + \frac{1}{6}x^4 + O(x^6) - x^2}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6}x^4 + O(x^6)}{x^4} \\ &= \lim_{x\to 0} 1 + O(x^2) = 1 + 0 = 1\ .\end{aligned}$$
