Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. U. Reif
R. Hartmann
J. Mehnert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 10
26.04.2010

2. Übungsblatt zur „Mathematik II für MB“

Aufgabe 4 (Konvergenzradii & -bereiche I)

Geben Sie für die folgenden Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt x_0 und die Koeffizientenfolge $a_0, \dots, a_5$ an. Bestimmen Sie außerdem jeweils den Konvergenzradius und -gebiet.

i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$,

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{ne^n}(x-1)^n$,

iii) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{\ln(n)}$,

iv) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 5^n (x-2)^n$,

Lösung:

(a) Der Entwicklungspunkt ist $x_0 = 0$, die Koeffizientenfolge ist durch $a_n = \frac{(-1)^n}{n!}$ gegeben. Es gilt

$$1/R := \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} {}^1\!/\!{}_n = 0 \ ,$$

d.h. die Potenzreihe hat Konvergenzradius $R = \infty$. Die Reihe konvergiert also auf ganz $\mathbb{R}$ (punktweise).

(b) Der Entwicklungspunkt ist $x_0 = 1$, die Koeffizientenfolge ist druch $a_n = \frac{(-1)^n}{ne^n}$ gegeben. Es gilt

$$1/R := \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \tfrac{n}{n+1} e^{-1} = {}^1\!/\!{}_e \ .$$

Die Potenzreihe hat somit Konvergenzradius $R = e$. Sie konvergiert folglich auf dem Intervall $(1-e, 1+e)$ und divergiert außerhalb des Intervalls $[1-e, 1+e]$. Für den Randpunkt $x = 1-e$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{ne^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n} \ .$$

Diese Reihe konvergiert nicht. Für den Randpunkt $x = 1+e$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{ne^n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \ .$$

Diese Reihe konvergiert. Insgesamt konvergiert die Potenzreihe also genau auf dem Gebiet $(1-e, 1+e]$.

(c) Der Entwicklungspunkt ist $x_0 = 0$, die Koeffizientenfolge ist durch $a_{2n} = 1/\ln(n)$ und $a_{2n+1} := 0$ gegeben. Es gilt

$$1/R := \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{a_{2n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}} = \sqrt{\frac{1}{1}} = 1 \ ,$$

d.h. die Potenzreihe hat Konvergenzradius $R = 1$. Sie konvergiert also auf $(-1, 1)$ und divergiert außerhalb von $[-1, 1]$. Für die Randpunkte $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ gilt

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x_1^{2n}}{\ln(n)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x_2^{2n}}{\ln(n)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)} .$$

Diese Reihe konvergiert nicht (z.B. mit Minorantenkriterium und $n \geq \ln(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$). Die Potenzreihe konvergiert also genau auf $(-1, 1)$.

(d) Der Entwicklungspunkt ist $x_0 = 2$, die Koeffizientenfolge ist durch $a_n = n^2 5^n$ gegeben. Es gilt

$$1/R := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} 5 \cdot (\sqrt[n]{n})^2 = 5 .$$

Die Potenzreihe hat somit Konvergenzradius $R = 1/5$, konvergiert also auf $(9/5, 11/5)$ und divergiert außerhalb von $[9/5, 11/5]$. Für den Randpunkt $x = 9/5$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 5^n (x-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 (-1)^n .$$

Diese Reihe ist divergent. Für den Randpunkt $x = 11/5$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 5^n (x-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 .$$

Auch diese Reihe ist divergent. Die Potenzreihe konvergiert also genau auf dem Intervall $(9/5, 11/5)$.

Aufgabe 5 (Taylorentwicklung I)

Berechnen Sie die Taylorreihen der folgenden Funktionen mit den angegebenen Entwicklungspunkten x_0 . Bestimmen Sie den jeweiligen Konvergenzradius.

(i) $\sin x$ mit $x_0 = \pi/2$

(ii) $1 + x - 2x^2$ mit $x_0 = 1$

(iii) $\sqrt{1+x}$ mit $x_0 = 0$

(iv) $\sqrt{x}$ mit $x_0 = 1$

Lösung:

(i) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}(-1)^k (x - \frac{\pi}{2})^k$, Radius ist ∞.

(ii) $-3(x-1) - 2(x-1)^2$, auch hier $R = \infty$.

(iii) $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \frac{7x^5}{256} - \frac{21x^6}{1024} \ldots$, Radius ist 1.

(iv) $1 + \frac{1}{2}(-1+x) - \frac{1}{8}(-1+x)^2 + \frac{1}{16}(-1+x)^3 - \frac{5}{128}(-1+x)^4 + \frac{7}{256}(-1+x)^5 - \frac{21(-1+x)^6}{1024} \ldots$, Radius 1.

Aufgabe 6 (Taylorentwicklung II)

i) Berechnen Sie die Taylorreihe der Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x}$ im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

ii) Bestimmen Sie nun die Taylorreihen der Funktionen $g(x) = \frac{x}{1+x}$ und $h(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ mithilfe Ihres Resultats aus i), ohne erneut die Taylorformel anzuwenden.

Lösung:

i) $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$

ii) $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{k+1}$ und $h(x) = -f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1) x^k$

Aufgabe 7 (Taylorentwicklung und Integration)

Bestimmen Sie das folgende Integral

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx$$

durch Integration des entsprechenden Taylorpolynoms bis auf einen maximalen Fehler von 10^{-2}.

Lösung:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + R_5(x) \rightsquigarrow \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^1 (1 - \frac{x^2}{3!})\, dx \int_0^1 \frac{R_5(x)}{x}\, dx = \frac{17}{18} + \int_0^1 \frac{\sin^{(5)}(\xi)}{5!} x^4\, dx$$

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx \sim \frac{17}{18}$$

Hausübung

Aufgabe H4 (Konvergenzradii & -bereiche I) (1+1+1+1 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils den Konvergenzbereich der folgenden Potenzreihen:

i) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n})^n\, x^n$,

ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n!}\,(x-3)^n$,

iii) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n(x+1)^{3n}}{2}$,

iv) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,x^{2n+1}$.

Lösung:

(a) Für die Koeffizieten $a_n = (\sqrt{n})^n$ gilt

$$1/R := \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{n} = \infty\ .$$

Die Potenzreihe hast somit Konvergenzradius $R = 0$, d.h die Potenzreihe konvergiert nur im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(b) Für die Koeffizienten $a_n = \frac{n^3}{n!}$ gilt

$$1/R := \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3 n!}{n^3(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\tfrac{1}{n}\cdot(\tfrac{n+1}{n})^3 = 0\ ,$$

d.h. die Potenzreihe hat Konvergenzradius $R = \infty$ und konvergiert damit auf ganz $\mathbb{R}$.

(c) Für die Koeffizienten $a_{3n} = 3^n/2$ und $a_{3n+1} = a_{3n+2} = 0$ gilt

$$1/R := \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[3n]{3^n/\sqrt{2}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{3}/\sqrt[3n]{2} = \sqrt[3]{3}\ .$$

Die Potenzreihe hat somit Konvergenzradius $R = \sqrt[3]{1/3} = \frac{1}{3}\sqrt{9}$. Sie konvergiert also auf $(-1-\frac{1}{3}\sqrt{9}, -1+\frac{1}{3}\sqrt{9})$ und divergiert außerhalb von $[-1-\frac{1}{3}\sqrt{9}, -1+\frac{1}{3}\sqrt{9}]$. Für den Randpunkt $x = -1-\frac{1}{3}\sqrt{9}$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n(x+1)^{3n}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2}\ .$$

Diese Reihe divergiert. Für den Randpunkt $x = -1+\frac{1}{3}\sqrt{9}$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n(x+1)^{3n}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{1}{2}\ .$$

Auch diese Reihe divergiert. Die Potenzreihe konvergiert also genau auf dem Intervall $(-1-\frac{1}{3}\sqrt{9}, -1+\frac{1}{3}\sqrt{9})$.

(d) Für die Koeffizientenfolge $a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$ und $a_{2n} := 0$ gilt

$$1/R := \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[2n+1]{|a_{2n+1}|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[2n+1]{1/(2n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1/n!} = 0\ ,$$

d.h. die Potenzreihe hat Konvergenzradius $R = \infty$. Sie konvergiert somit auf ganz $\mathbb{R}$.

Aufgabe H5 (Taylorentwicklung) (2+2 Punkte)

Berechnen Sie die Taylorentwicklungen der Funktionen $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ und $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Lösung: $f(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 - \ldots$ und $g(x) = 1 - x^2 + x^4 + \ldots$.

Aufgabe H6 (Taylorentwicklung und Integration) (2 Punkte)

Bestimmen Sie die Taylor-Reihe der Funktion

$$f\colon (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{8x}{4x^2 - 1}$$

im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

HINWEIS: Betrachte $\int f(x)dx$ und verwende $\ln(1+y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} y^k$.

Lösung: Wir bestimmen die Reihenentwicklung von $\int_0^x f(t)dt$, also eine Stammfunktion von f und bestimmen die Reihenentwicklung von f dann durch Differenzieren:

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \frac{8t}{4t^2 - 1} = \int \frac{-8t}{1 - 4t^2} dt = [\ln(1 - 4t^2)]_0^x = \ln(1 - 2x) + \ln(1 + 2x).$$

also folgt

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(-2x)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(2x)^n = -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}x^{2n}}{2n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}x^{2n}}{n}.$$

Ableiten ergibt

$$f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2k+1}x^{2k-1}.$$

Aufgabe H7 (Taylorentwicklung und Restglied) (3 Punkte)

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \sin(3x)\,.$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom 3-ter Ordnung mit Entwicklungspunkt $x_0 = \pi$. Schätzen Sie den Fehler für $x = \frac{3\pi}{4}$.

Lösung: Die Ableitungen sind

$$\begin{aligned} &f(x) = \sin(3x)\, f'(x) = 3\cos(3x)\, f^{(2)}(x) = -9\sin(3x),\ f^{(3)}(x) = -27\cos(3x), \\ &f(\pi) = 0\, f'(\pi) = -3,\ f^{(2)}(\pi) = 0, \end{aligned}$$

Also:

$$T_3(x) = 0 - \frac{3}{1!}(x - \pi) + \frac{0}{2!}(x - \pi)^2 = -3(x - \pi).$$

Mit dem Restglied nach Lagrange $R_3(x, 0) = f(x) - T_3(x) = -9\cos(3\zeta)(x - \pi)^3$, $\zeta \in (\frac{3}{4}, 1)\pi$ ergibt sich $|R_3| \leq \frac{9}{64}\pi^3 \approx 4.36$. Anstelle relativ grob abzuschätzen $\max_{x \in [\frac{3}{4}, 1]\pi} |\cos(x - \pi)| \leq 1$ hätte man auch $\max_{x \in [\frac{3}{4}, 1]\pi} |\cos(x - \pi)| = \cos(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ verwenden können.