Prof. U. Reif
R. Hartmann, J. Mehnert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS2010
19.04.2010

Mathematik II für MB

1. Studenten-Lösung

Präsenzaufgaben

P1 Funktionenfolgen I

Bestimmen Sie den punktweisen Grenzwert der folgenden Funktionenfolgen:

i) $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n},\ x \in \mathbb{R}$ ii) $f_n(x) = nxe^{-nx},\ x \in \mathbb{R}^+$

iii) $f_n(x) = nxe^{-nx},\ x \in \mathbb{R}^-$ iv) $f_n(x) = \sqrt[n]{x},\ x \in \mathbb{R}_0^+$

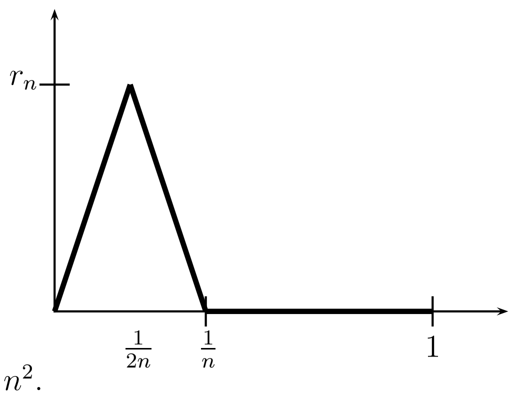
Lösung:

i) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, ii) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, iii) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ existiert nicht,

iv) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \mathbb{R}_0^+/\{0\} \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

P2 Funktionenfolgen & Integration

Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei wie in der folgenden Skizze gegeben:



Betrachten Sie den Fall $r_n = n^2$.

i) Geben Sie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ explizit an.

ii) Berechnen Sie den punktweisen Grenzwert $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig?

iii) Vergleichen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \quad \text{und} \quad \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx\ .$$

Erklären Sie Ihre Beobachtung.

Führen Sie Ihre Untersuchungen nun für die Fälle $r_n = n$ und $r_n = 1$ durch. Diskutieren Sie insbesondere die Vertauschbarkeit von Grenzwert und Integration. Finden Sie eine Folge r_n, sodass f_n gleichmäßig konvergiert.

Lösung:

i) $f_n(x) = \begin{cases} 2n^3x & , \ x \in [0, \frac{1}{2n}[\\ -2n^3x + 2n^2 & , \ x \in [\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}[\\ 0 & , \ \text{sonst} \end{cases}$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ für $x \in [0, 1]$. Die Konvergenz ist nicht gleichmäßig.

iii) $\int\limits_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = 0 \neq \infty = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2} = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)\,dx$

P3 Funktionenreihen I: differenzieren & integrieren

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die Funktion $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $D(f_n) = [0, \infty)$ und

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n^2}.$$

a) Zeigen Sie, daß die Funktionenreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ auf $[0, \infty)$ punktweise und gleichmäßig konvergiert.

b) Berechnen Sie $\int\limits_0^1 g(x)\,dx$, wobei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $D(g) = [0, \infty)$ und

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

die Summe der Funktionenreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ ist.

c) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$?

Lösung:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und jedes $x \in [0, \infty)$ ist

$$|f_n(x)| = [\ldots] \leq \frac{1}{n^2} =: c_n.$$

Da die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

konvergiert, ist die Funktionenreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ auf $[0, \infty)$ *gleichmäßig konvergent* (Majorantenkriterium) also auch *punktweise konvergent.*

(b) Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $D(g) = [0, \infty)$ und

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

die Summe der Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Da gleichmäßige Konvergenz vorliegt, dürfen Integration und der Limes $n \to \infty$ getauscht werden,

$$\begin{aligned}\int_0^1 g(x)\,dx = [\ldots] &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{n^2}\,dx \\ &= [\ldots] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}\left(1 - e^{-n}\right).\end{aligned}$$

Stellen im Skript: 1.8: "Vertauschung von Ableitung und Folgengrenzwert", 1.10: "alle Eigenschaften gleichmäßig konvergenter Funktionenfolgen lassen sich somit unmittelbar auf Funktionenreihen übertragen".

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$f_n'(x) = -\frac{e^{-nx}}{n}.$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

$\underline{x = 0}$: In diesem Fall erhalten wir mit der harmonischen Reihe [...] eine *divergente Reihe.*

$\underline{x > 0}$: Sind für x nur positive Werte erlaubt, so ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{e^{-nx}}{n}$$

konvergent, denn mit

$$a_n := -\frac{e^{-nx}}{n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= [\ldots] \\ &= e^{-x} = \frac{1}{e^x} < 1 \qquad \text{für } x > 0\end{aligned}$$

und somit ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{e^{-nx}}{n}$$

nach dem Quotientenkriterium für alle $x > 0$ *konvergent.* ∎

Hausaufgaben

H1 Funktionenfolgen II 4 Punkte

Bestimmen Sie den punktweisen Grenzwert der folgenden Funktionenfolgen:

i) $f_n(x) = \arctan(x - n), \quad x \in \mathbb{R}$ ii) $f_n(x) = n(x - n + |x - n|), \quad x \in \mathbb{R}_0^+$

iii) $f_n(x) = \arctan(nx), \quad x \in \mathbb{R}$ iv) $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + nx}, \quad x \in \mathbb{R}$.

Lösung:

i) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = -\frac{\pi}{2}$, ii) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$,

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & , \ x > 0 \\ 0 & , \ x = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & , x < 0 \end{cases}$, iv) $\lim\limits_{n\to\infty} = 0$

H2 Funktionenfolgen III $1 + 2 + 2$ Punkte

Betrachten Sie die Funktionenfolge

$$f_n(x) = nx(1 - x)^n \text{ auf } [0, 1] \ .$$

a) Berechnen Sie $f_n(0)$ und $f_n(1)$ sowie den punktweisen Grenzwert der Funktionenfolge.
b) Bestimmen Sie die Folge der Maximalwerte $f_n(x_n)$, wobei die Funktion f_n jeweils an der Stelle x_n ihr lokales Maximum annimmt. Berechnen Sie insbesondere $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n)$.
c) Entscheiden Sie nun, ob die Folge $f_n(x)$ gleichmäßig konvergiert.

Lösung:

i) $f_n(0) = 0$ und $f_n(1) = 0$, ferner $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

ii) $f_n(x_n) = f_n(\frac{1}{1+n}) = \frac{n}{1+n}(\frac{n}{1+n})^n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n) = \frac{1}{e}$

iii) $f_n(x)$ konvergiert nicht gleichmäßig. Die Modifikation $\tilde{f}_n(x) = \frac{f_n(x)}{n}$ schon.

H3 Funktionenreihen II: Differenzieren 2+2 Punkte

a) Zeigen Sie, dass die Funktionenreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + \frac{1}{x^n}), \qquad x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$$

punktweise und gleichmäßig konvergiert. Gehen Sie wie folgt mit dem Majorantenkriterium vor:

1. Schätzen Sie den Betrag der Summanden auf eine von x unabhängige Folge c_n ab.
2. Die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ lässt sich z.B. mit dem Quotientenkriterium zeigen.

b) Begründen Sie durch explizites Verweisen auf die relevanten Stellen im Skript, warum die dadurch gegebene Funktion stetig und differenzierbar ist. Berechnen Sie die Ableitung.

Lösung:

Der Schlüssel zur Lösung der Aufgabe ist das Weierstraß'sche Majorantenkriterium für Funktionenreihen, auch *Weierstraß M-Test* genannt. Wir schätzen für alle $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ ab:

$$\left| \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + \frac{1}{x^n}) \right| \leq [\ldots] \leq \frac{n^2}{\sqrt{n!}} 2^{n+1}.$$

Zur Abkürzung schreiben wir nun $c_n := \frac{n^2}{\sqrt{n!}} 2^{n+1}$ und müssen nur noch zeigen, dass $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert, dann folgt mit dem Majoranten-Kriterium die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenreihe. Wir benutzen hierfür das Quotientenkriterium und sehen dass

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = [\ldots] = 0 < 1.$$

Daraus folgt, dass $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert und wir haben bewiesen, dass die Reihe gleichmäßig konvergiert. Also konvergiert sie auch punktweise. Des weiteren ist die durch die Reihe definierte Funktion stetig als Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Reihe stetiger Funktionen (Skript "1.6 Stetigkeit").

Um festzustellen, dass die Grenzfunktion differenzierbar ist, überlegen wir, dass die Folge der Ableitungen gleichmäßig konvergiert ("1.8 Vertauschung von Ableitung und Folgengrenzwert", oder, besser, "1.14 Vertauschbarkeit von Ableitung und Summation"). Es gilt

$$\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{n^2}{\sqrt{n!}} (x^n + \frac{1}{x^n}) \right)' = [\ldots] = \sum_{n=1}^{N} \frac{n^3}{\sqrt{n!}} (x^{n-1} - x^{-n-1}),$$

und die Frage ist also, ob diese Reihe konvergiert. Um dies zu beweisen, kommt wieder der Weierstraß M-Test zum Zuge. Wir schätzen weiter ab:

$$\left| \frac{n^3}{\sqrt{n!}} (x^{n-1} - x^{-n-1}) \right| \leq [\ldots] \leq \frac{n^3}{\sqrt{n!}} 2^{n+2} =: c'_n$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c'_n$ konvergiert wie oben mit dem Quotientenkriterium. Also konvergiert die Folge der Ableitungen nach dem M-Test gleichmäßig und zwar gegen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{\sqrt{n!}} (x^{n-1} - x^{-n-1})$. Nach "1.14 Vertauschbarkeit von Ableitung und Summation" ist die durch die in der Aufgabe gegebene Reihe definierte Funktion differenzierbar und hat die Ableitung $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{\sqrt{n!}} (x^{n-1} - x^{-n-1})$.