



12. Übungsblatt zur „Mathematik II für MB“

Aufgabe 39 Divergenz

Berechnen Sie die Divergenz folgender Vektorfelder:

$$F_1(x, y, z) := \begin{pmatrix} xyz + 2xy \\ -x^2y - x^2 \\ z - 3z^2 \end{pmatrix}, \quad F_2(x, y, z) := \begin{pmatrix} xy \\ e^x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F_3(x, y, z) := \text{grad}(xyz + e^x).$$

Aufgabe 40 Satz von Gauß am Einheitswürfel

Berechnen Sie für den Einheitswürfel $W = [0, 1]^3$ und das Vektorfeld

$$F(X) = (x^2, yz, y)^T$$

beide im Gauß'schen Integralsatz auftretenden Integrale.

Aufgabe 41 Satz von Gauß am Zylinder

Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes

$$F(X) = \begin{pmatrix} xz \\ yz \\ z^2 \end{pmatrix}$$

durch die Oberfläche des Zylinderausschnitts

$$Z := \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq a^2 \text{ und } 0 \leq z \leq b\}$$

von innen nach außen. Verwenden Sie den Satz von Gauß.

Hausübung

Aufgabe H41 Laplace-Operator

(1+3 Punkte)

Berechnen Sie $\operatorname{div}(\operatorname{grad} U)$ für die skalaren Felder im \mathbb{R}^3 . Die Zuordnung $U \rightarrow \operatorname{div}(\operatorname{grad} U)$ heißt Laplace-Operator. Statt $\operatorname{div}(\operatorname{grad} U)$ schreibt man auch ΔU .

a) $U(X) = ze^{x^2y}$

b) $U(X) = \frac{P^T X}{\|X\|^3}$, $X \neq 0$ (Dipolpotential mit Achsenrichtung $P \in \mathbb{R}^3$)

Hinweis: $P^T X$ ist das Skalarprodukt $\langle P, X \rangle = (p_x x + p_y y + p_z z)$.

Aufgabe H42 Satz von Gauß in der Ebene

(4 Punkte)

Berechnen Sie für die Kreisscheibe $K : x^2 + y^2 \leq 1$ das Integral

$$\iint_K \operatorname{div} F,$$

wobei das Vektorfeld F gegeben ist mit

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x e^{\sin(\pi r^2)} \\ y e^{\cos(\pi r^2)} \end{pmatrix}, \quad r^2 = x^2 + y^2.$$

Hinweis: Geben Sie zunächst das Vektorfeld F in Polarkoordinaten an. Verwenden Sie dann den Satz von Gauß.

Aufgabe H43 Fluss durch Zylinder

(4 Punkte)

Berechnen Sie den Fluss des Feldes

$$V = (xy^2, x^2y, y)^T$$

durch die Oberfläche des Zylinderabschnitts

$$B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1 \text{ und } -1 \leq z \leq 1\}$$

von innen nach außen.

Hinweis: Nehmen Sie den Satz von Gauß zu Hilfe.

Für die Hausübungen dieses Übungsblattes ist kein Rücklauf mehr vorgesehen. Die Hausübungen von diesem Blatt werden aber ganz regulär bepunktet und fließen in die Gesamtpunktzahl mit ein. Das letzte Übungsblatt (Blatt 13) wird keine Hausübungen mehr enthalten.