Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. U. Reif
R. Hartmann, T. Koch

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 10
28.6.2010

11. Übungsblatt zur „Mathematik II für MB"

Aufgabe 35 Intervall im $\mathbb{R}^3$

Gegeben sei das Intervall $I = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{\pi}{2} \le x \le \pi,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le \pi\}$. Berechnen Sie

$$\int_I x \sin(xy + z)\, d(x, y, z).$$

Aufgabe 36 Einheitsdreieck

Sie haben das Dreieck $\triangle$ mit Eckpunkten $A = (2, -1), B = (3, 4)$ und $C = (0, 0)$ vorliegen. Desweiteren ist die Funktion

$$f(x, y) = x^2 - y^2 = [x, y] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

gegeben.

a) Berechnen Sie die Integrale

$$\mathrm{Vol}(\triangle) = \int_\triangle dX, \qquad \int_\triangle f(X) dX$$

auf direktem Wege, indem Sie projizierbare Mengen nach 10.5 des Skriptes verwenden.

b) Vereinfachen Sie das Integrationsgebiet mithilfe der Substitutionsregel aus 10.9 des Skripts. Bestimmen Sie hierzu explizit eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ so, dass $z \mapsto Mz$ das Einheitsdreieck $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$ auf $\triangle$ abbildet.

Sie können den Flächeninhalt des Einheitsdreiecks leicht angeben. Was erhalten Sie in Abhängigkeit von M?

Aufgabe 37 Integralprodukt

Berechnen Sie für

$$B_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le R^2\}$$

den Wert des Integrals

$$I_R = \int_{B_R} e^{-x^2} e^{-y^2}\ \mathrm{d}(x, y)$$

in Abhängigkeit von $R \in (0, \infty)$.

Bestimmen Sie weiterhin den Grenzwert $\lim_{R\to\infty} I_R$.

Aufgabe 38 Kreis weniger Quadrat

Bestimmen Sie den Wert des Integrals

$$\int_G (x^2 + y^2)\, d(x, y)$$

für den Integrationsbereich

$$G = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \, |x| \geq 1 \text{ oder } |y| \geq 1, \; x^2 + y^2 \leq 2\Big\}.$$

Verwenden Sie Polarkoordinaten. Skizzieren Sie dazu zuerst den Integrationsbereich G.

Hausübung

Aufgabe H37 Integrale (1+1+2 Punkte)

Berechnen Sie folgende Integrale über dem jeweils angegebenen Interval:

a) $\int_I \left(x + y^2 + z^3\right) dX$ mit $I := [0,3] \times [0,2] \times [0,1]$,

b) $\int_I \sin(x+y) dX$ mit $I := [0, \frac{\pi}{2}]^2$,

c) $\int_I \max(x,y) dX$ mit $I := [-1,1]^2$.

Aufgabe H38 Ellipse & Flächeninhalt (3 Punkte)

Berechnen Sie den Flächeninhalt der Ellipse

$$\mathcal{E}_{a,b} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}, \quad a,b > 0.$$

Sie können dabei abgewandelte Polarkoordinaten

$$x = ar\ \cos\varphi, \quad y = br\ \sin\varphi$$

verwenden.

Aufgabe H39 Zweites Dreieck (2 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\triangle} \left(2x - 4xy + y^2\right) dX$$

über dem Dreieck $\triangle$ mit den Ecken $(0,0), (2,0), (-1,2)$.

Aufgabe H40 Kugelkappe (3 Punkte)

Durch die Menge

$$K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \, z \geq \frac{1}{2}\right\}$$

wird eine Kugelkappe der Einheitskugel beschrieben. Veranschaulichen Sie diese Menge mit Hilfe einer Skizze und bestimmen Sie das Volumen von K.

Hinweis: Zylinderkoordinaten sind möglicherweise hilfreich.