Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. U. Reif
R. Hartmann, T. Koch

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 10
14.06.2010

9. Übungsblatt zur „Mathematik II für MB“

Aufgabe 29 Parameterintegrale

Berechnen Sie für die folgenden Funktionen jeweils deren Ableitung g' explizit. Geben Sie zwei Lösungswege an:

1. Indem Sie $g(y)$ bestimmen und ableiten.
2. Indem Sie den Integrand partiell differenzieren.

a) $g(y) = \int_0^{\pi/2} f(x,y)\mathrm{d}x$ mit $f(x,y) = \sin x \cos y$.

b) $g(y) = \int_1^{y^2} f(x,y)\mathrm{d}x$, wobei $f(x,y) = (1-y^3)(1-2xy+x^2)$.

Aufgabe 30 Kurvenintegrale

Zwei Hochspannungsmasten stehen $d = 100\ m$ voneinander entfernt. Die Leitung hängt in der Mitte durch. Die entstehende Kurve wird durch die Funktion

$$y = f(x) = a \cdot \cosh(x/a)$$

für $-d/2 \leq x \leq d/2$ und dem Parameter $a \in \mathbb{R}$ beschrieben. Die Masten stehen bei $x = -d/2$ und $x = d/2$. In der Mitte zwischen den beiden Masten ($x = 0$) befindet sich die Leitung in einer Höhe von $48\ m$.

(a) Fertigen Sie eine Skizze an.
(b) Bestimmen Sie den Parameter a.
(c) Wie lang ist die Leitung?

Aufgabe 31 Klausuraufgabe (30 Minuten)

Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy^2$$

und die Kurve

$$X_r(t) = [e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t]^T, t \in [0,r].$$

a) Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen von f, die von Null verschieden sind.

b) Geben Sie die Taylor-Reihe von f im Entwicklungspunkt $(x_0,y_0) = (0,1)$ an.

c) Geben Sie die Hesse-Matrix von f an und bestimmen Sie alle drei kritischen Punkte von f sowie deren Charakter.

d) Berechnen Sie die Länge L_r der Spur der Kurve X_r sowie den Grenzwert $\lim_{r\to\infty} L_r$.

e) Geben Sie ein Vektorfeld F an, das f als Potenzial besitzt. Berechnen Sie das Arbeitsintegral W_r von F entlang der Kurve X_r sowie den Grenzwert $\lim_{r\to\infty} W_r$.

Hausübung

Aufgabe H31 Kurvenintegrale (1+2 Punkte)

Wir betrachten einen (näherungsweise) geraden, unendlich langen Leiter, durch den ein konstanter Strom I fließt. Wir nehmen an, der Leiter liege in der z-Achse. Dann wird das entstehende Magnetfeld durch die Funktion

$$F(x,y,z) = \frac{I}{2\pi}\Big(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\Big)^T$$

beschrieben. Sei K eine kreisförmige Kurve parallel zur xy-Ebene mit Radius $r > 0$ und Mittelpunkt auf der z-Achse.

a) Parametrisieren Sie die Kurve K.

b) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_K F \cdot dX$.

Aufgabe H32 Kurvenintegrale (3 Punkte)

Wir betrachten die Kurve K von $(0,0,0)^T$ nach $(2,0,1)^T$, die sich aus dem Weg $X_1(t) := (2t^2 - t, t^2, t)^T$ mit $t \in [0,1]$ und dem Geradenstück von $(1,1,1)^T$ nach $(2,0,1)^T$ zusammensetzt. Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_K F \cdot dX$ für das Vektorfeld

$$F(x,y,z) := (2x + yz, y^2 - z^4, xz^2)^T \ .$$

Aufgabe H33 Extremwerte und Taylorpolynome (2+3+1 Punkte)

Betrachen Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := x^2 e^{y/2}(y-3) - \tfrac{1}{2}y^2 \ .$$

a) Berechnen Sie den Gradienten $\nabla f(x,y)$ und die Hessematrix $\nabla^2 f(x,y)$.

b) Bestimmen Sie die kritischen Stellen von f und deren Art.

c) Berechnen Sie die Taylorreihe Tf und das Taylorpolyon $T_3 f$ von f im Entwicklungspunkt $(0,0)$ mit Hilfe bekannter Reihen.