Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. U. Reif
R. Hartmann, T. Koch

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 10
07.06.2010

8. Übungsblatt zur „Mathematik II für MB"

Aufgabe 26 Extremwerte

Bestimmen Sie ohne Berechung des Gradienten oder der Hessematrix (z.B. anhand einer geeigneten Skizze) die Art des kritischen Punktes $(0,0)$ der folgenden Funktionen:

(a) $f(x,y) := xy$, (b) $f(x,y) := x^2 - y^2$, (c) $f(x,y) := x^2 + y^2$,
(d) $f(x,y) := \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, (e) $f(x,y) := \cos(xy)\sin(xy)$, (f) $f(x,y) := x^2 \sin(xy)$.

Aufgabe 27 Definitheit

Welche der nachfolgenden Matrizen sind
a) positiv definit b) negativ definit c) indefinit d) nichts davon?
Begründen Sie Ihre Aussage!

$$A_1 = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix},$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tip: Jede rationale Nullstelle eines normierten Polynoms (höchster Koeffizient ist 1) mit ganzzahligen Koeffizienten ist ganzzahlig und Teiler des Absolutgliedes (Absolutglied=Koeffizient von x^0).

Aufgabe 28 Temperaturverteilung

Eine rechteckigen Platte $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x \le 1, \ |y| \le 1\}$ habe die Temperaturverteilung $T(x,y) = 1 - 4\ln^2(x+1)y^2$, für $(x,y) \in D$.

a) Skizzieren Sie die Temperaturverteilung durch einige Isothermen, d.h., Linien konstanter Temperatur.

b) Bestimmen Sie alle Extrema und deren Art innerhalb des Rechtecks.

c) Bestimmen Sie alle Extrema auf dem Rand des Rechtecks.

d) Geben Sie die globalen Maxima und Minima an.

Hausübung

Aufgabe H27 Extremwertaufgabe (2 Punkte)

Zerlegen Sie die Zahl 12 in drei echt positive Summanden, so dass das Produkt der Summanden möglichst groß ist.

Aufgabe H28 Ausgleichsrechnung (1+1+1 Punkte)

Wird ein Fahrzeug aus der Geschwindigkeit v auf Stillstand abgebremst, so setzt man für den Bremsweg y in Abhängigkeit von v folgende Gesetzmäßigkeit an:

$$y = av^2 + bv \ .$$

Zur Bestimmung von a und b werden 3 Messungen durchgeführt:

$v_i[\frac{m}{s}]$:	9	17	25
$y_i[m]$:	3	9	14

Da die Messungen ungenau sind, gibt es kein Tupel $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, sodass $y_i = av_i^2 + bv_i$ für alle $i = 1, 2, 3$ gilt. Gesucht ist deswegen die "*im quadratischen Mittel beste*" oder "*ausgleichende*" Wahl von (a, b), d.h., es wird das Minimum der Funktion

$$\mathbb{R}^2 \ni (a, b) \mapsto \sum_{i=1}^{3} (y_i - av_i^2 - bv_i)^2$$

gesucht.

a) Dieses Problem lässt sich allgemein als Minimalproblem formulieren:

Gegeben sei eine $n \times m$-Matrix A mit $n > m$ und ein Vektor $Y \in \mathbb{R}^n$. Gesucht ist ein Mininum der Abbildung $\mathbb{R}^m \ni X \mapsto ||Y - AX||^2$.

Bestimmen Sie die Matrix A und den Vektor Y für das obige Problem.

b) Zeigen: Sie $X_0 \in \mathbb{R}^m$ löst das Minimalproblem genau dann, wenn $A^T AX_0 = A^T Y$.

c) Lösen Sie das Minimalproblem für obiges Beispiel.

Aufgabe H29 Extremwertaufgabe und Polarkoordinaten (6x1 Punkte)

Wir betrachten die Funktion $f(x, y) := (3x^2y - y^3)^2 e^{-x^2-y^2}$ und wollen die lokalen Extrema bestimmen. In Abbildung 1 sehen Sie eine Darstellung des Graphen der Funktion. Man sieht, dass die Funktion Drehsymmetrien aufzuweisen scheint. Wir betrachten deshalb die Funktion in Polarkoordinaten.

Die Funktion $P : [0, \infty) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ mit $P(r, \varphi) := (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ rechnet Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten um.

a) Bestimmen Sie die Ableitung $\nabla f(x, y)$ von f.

b) Bestimmen Sie die Ableitung $DP(r, \varphi)$ der Funktion P.

c) Zeigen Sie mit Hilfe der Kettenregel, dass im Punkt $(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ gilt

$$\frac{\partial(f \circ P)}{\partial r}(r, \varphi) = f_x(x, y) \cos \varphi + f_y(x, y) \sin \varphi \ ,$$
$$\frac{\partial(f \circ P)}{\partial \varphi}(r, \varphi) = r(-f_x(x, y) \sin \varphi + f_y(x, y) \cos \varphi) \ .$$

(Vergleichen Sie ggf. mit Ihrer Formelsammlung.)

d) Berechnen Sie die Verkettung $f \circ P$ und deren Ableitung. Vergleichen Sie mit der in c) gezeigten Ableitungsregel. *Hinweis:* Nutzen Sie zur Vereinfachung $\sin(3\varphi) = \sin\varphi(3\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$.

e) Bestimmen Sie die kritischen Stellen von f, indem Sie die kritischen Stellen von $f \circ P$ berechnen.

f) Bestimmen Sie die Art der kritischen Stellen anhand der Skizze.

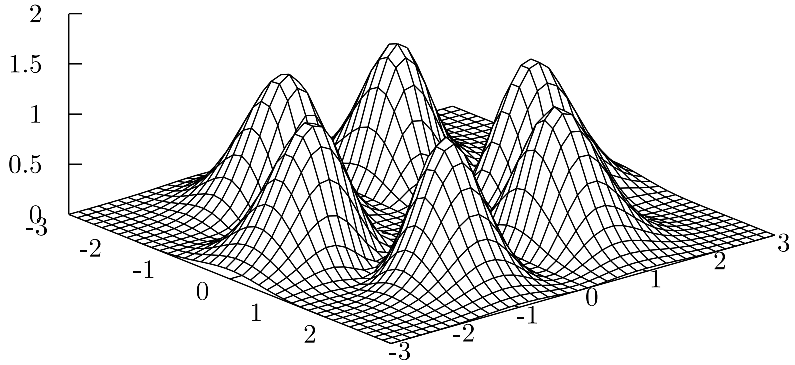

Abbildung 1: Graph von $f(x,y) = (3x^2y - y^3)^2 e^{-x^2-y^2}$

Aufgabe H30 Multivariate Taylorpolynome (Wdh - 0 Punkte)

a) Sei

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) = xy^2z^3.$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom der Ordnung 2 von f. Verwenden Sie dieses anschließend, um $1.002 \cdot 2.003^2 \cdot 3.004^3$ näherungsweise zu berechnen.

b) Berechnen Sie das Taylorpolynom von Ordnung 4 der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \exp(x^2y).$$

Tip: Taylorreihe von $\exp(z)$.