Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. U. Reif
R. Hartmann

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 10
24.05.2010

6. Übungsblatt zur „Mathematik II für MB“

Aufgabe 19 Jakobi-Matrix

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

(a) $f : R^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (xy, \cosh(xy), \log(1 + x^2))$

(b) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $g(x, y, z) = (x \sin(y) \cos(z), x \sin(y) \sin(z), x \cos(y))$

(c) $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $H(x, y) = \nabla h(x, y)$, mit
$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x, y) = xy + 2x \sin(y + \pi/2) + \exp(-y) \cos(x)$.

Aufgabe 20 Kettenregel

Es seien die Funktionen f, h, G gegeben durch

$$\begin{aligned} f(x,y) &= -x^2 + 2xy - y^3 && (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ G(\varphi) &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} && \varphi \in \mathbb{R} \\ h(\varphi) &= f(G(\varphi)) && \varphi \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

a) Geben Sie die partiellen Ableitungen f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy} an.
Stimmen f_{xy} und f_{yx} überein?
b) Bestimmen Sie die erste Ableitung von h mit der Kettenregel.
c) Bestimmen Sie $h'(\varphi)$ direkt.

Aufgabe 21 Richtungsableitung

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x, y) = xy + 2x \sin(y + \pi/2) + \exp(-y) \cos(x).$$

a) Bestimmen Sie den Gradienten $\nabla f(X_0)$ von f an der Stelle $X_0 = (0, 0)$.
b) Berechnen Sie die Richtungsableitung $\nabla_A f(X_0)$ in der Richtung A, die durch den Vektor $(-3/\sqrt{10}, 1/\sqrt{10})$ gegeben ist.
c) Für welche Richtungen verschwindet $\nabla_B f(X_0)$, d.h. wann gilt $\nabla f(X_0)B = 0$?

Aufgabe 22 Differenzierbarkeit

Sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Bestimmen Sie alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, an welchen h differenzierbar ist.

Hausübung

Aufgabe H21 Gradient (1+2 Punkte)

Für $x \neq 0$ sei $f(x, y) = \arctan(y/x)$.
i) Bestimmen Sie den Gradienten $\nabla f(x, y)$.
ii) Zeigen Sie: Falls $x \neq 0$ folgt $\|\nabla f(x, y)\| = 1/\|(x, y)\|$ und $|x f_x(x, y) + y f_y(x, y)| \leq 1$.

Aufgabe H22 Kettenregel II (1+1+2 Punkte)

(a) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = e^z y + x^2 y^2$ and $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $g(t) = (2t^2, \sin t, e^t)$. Berechnen Sie die Ableitung von $f \circ g$ auf zwei verschiedene Arten:

i. Direkt durch Berechnung von $h(t) = f(g(t))$ und Differenzieren von h.

ii. Durch Anwenden der Kettenregel.

(b) Betrachten Sie die Abbildung $h : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $h(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}}$

Berechnen Sie den Gradienten von h, in dem Sie h darstellen als Verkettung von Funktionen, deren Ableitung Sie bereits kennen.

Aufgabe H23 Differenzierbarkeit II (2+2+2 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) := \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2}, & \text{falls } \ y > 0, \\ -\sqrt{x^2 + y^2}, & \text{falls } \ y < 0, \\ x, & \text{falls } y = 0. \end{cases}$$

(i) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix $Df(x, y)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $y \neq 0$.

(ii) Bestimmen Sie alle $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ für die die Richtungsableitung $\nabla_v f(0, 0)$ existiert.

(iii) Ist f differenzierbar in $(0, 0)$?
Hinweis: Betrachten Sie die Nullfolge definiert durch $h_n := \left(\frac{(-1)^n}{n}, \frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$.