Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. U. Reif
R. Hartmann

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 10
17.05.2010

5. Übungsblatt zur „Mathematik II für MB“

Aufgabe 16 Folgen im $\mathbb{R}^2$

Wir betrachten die folgenden Folgen in $\mathbb{R}^2$:

$$a_n = (n,\ \frac{1}{n})^T,\ b_n = (\frac{1}{n^2},\ \frac{n}{1+n})^T,\ c_n = (\frac{1}{n^2},\ \frac{1}{n^2})^T,\ d_n = (\sin(\frac{n\pi}{4}),\ \cos(\frac{n\pi}{4}))^T.$$

(a) Skizzieren Sie diese Folgen und entscheiden Sie, welche von ihnen beschränkt sind.

(b) Welche dieser Folgen sind konvergent, welche nicht? Was ist gegebenenfalls der Grenzwert?

(c) Geben Sie vier weitere Nullfolgen in $\mathbb{R}^2$ an.

Aufgabe 17 Stetigkeit im $\mathbb{R}^2$

Sie haben die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vorliegen:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y = 0 \\ \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Sind die beiden Komponentenfunktionen

$$k_1(x) := f(x,0), \quad k_2(y) := f(0,y)$$

stetig?

b) Ist f eine stetige Funktion? Falls ja: weisen Sie nach, dass dem so ist. Anderenfalls geben Sie explizit zwei Folgen $a_n = (x_n, y_n)$ und $b_n = (\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)$ aus $\mathbb{R}^2$ an, für die

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

aber

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(b_n)$$

ist.

Aufgabe 18 Lineare Abbildungen

Sind die folgenden Abbildungen jeweils linear? Sind sie quadratische Funktionen? Falls ja, geben Sie diese in der im Skript 4.8 gegebenen Notation an. *Hinweis:* Sie dürfen benutzen, dass, falls die Funktionen nicht linear/quadratisch sind, sie sich nicht in der im Skript gegebenen Notation schreiben lassen. In diesem Fall müssen Sie jedoch erklären, weshalb das nicht möglich ist.

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = xy$.

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x,y) = (2y, x+y)^T$.

(c) $f(x,y) = 1 + x - y$.

Hausübung

Aufgabe H17 Stetigkeit (1+2 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{\sin(x)y^2}{x^2 + y^4}$$

(a) Ist die Funktion f stetig?

(b) Ist sie stetig auf $\mathbb{R}^2$ fortsetzbar, d.h. gibt es eine stetige Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $F_{|\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}} = f$?

Aufgabe H18 Lineare Abbildungen II (3+2 Punkte)

Wir betrachten die linearen Abbildungen $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ und $\Psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$\Phi(x_1, x_2) = (x_2, x_1, 3x_1 - x_2)^T, \qquad \Psi(y_1, y_2, y_3) = y_2 + y_3 - y_1.$$

Bestimme die zu Φ, Ψ und $\Psi \circ \Phi$ gehörigen Matrizen. Wie hängen diese Matrizen zusammen?

Aufgabe H19 Definitionsbereich (3+0+1+1+∗ Punkte)

Geben Sie den maximalen Definitionsbereich folgender Funktionen an:

(a) $f(x,y) = \sin \frac{1}{xy}$.

(b) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + 2y^2 - 1}$.

(c) $f(x,y) = \frac{1}{\sin x \cdot \sin y}$.

Skizzieren Sie die Mengen auch. Ränder, welche nicht mehr im Definitionsbereich enthalten sind zeichnen Sie bitte gestrichelt ein.

(∗) *Freiwillige Zusatzaufgabe:* Visualisieren Sie die Funktionen mit Hilfe der MATLAB-Funktionen `mesh` und `surf`. Wenn Ihnen bei dieser oder einer anderen Aufgabe Punkte fehlen darf Ihr Tutor Ihnen für die Zusatzaufgabe bis zu zwei Punkte gewähren (nach Ermessen).

Aufgabe H20 Glockenkurve von Gauß (2+1+1 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$. (Der Graph dieser Funktion ist die bekannte Gaußsche Glockenkurve.)

a) Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_5 f(x)$ sowie die Taylorreihe für die Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ an.

b) Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.
Hinweis: Dieses Integral besitzt keinen geschlossenen Ausdruck als Lösung.

d) Berechnen Sie mit Hilfe des Taylorpolynoms aus a) näherungsweise $F(1)$. *Hinweis:* Der exakte Wert ist $0,842701$.