Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. U. Reif
R. Hartmann
J. Mehnert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 10
10.05.2010

4. Übungsblatt zur „Mathematik II für MB“

Aufgabe 12 (Fourier-Entwicklung)
Betrachten Sie die Funktion $f(x) := |x|$ auf dem Intervall $[-\pi, \pi)$.

(a) Setzen Sie f stetig zu einer 2π-periodischen Funktion fort und skizzieren Sie diese Funktion. Wir bezeichnen auch die fortgesetzte Funktion mit f. Ist f gerade oder ungerade?

(b) Berechnen Sie die Fourierreihe Ff.

(c) Bestimmen Sie durch Einsetzen eines geeigneten Wertes in die Fourierreihe den Wert der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Aufgabe 13 (Periodische Funktionen)

i) Die Funktion $f(x) = \cos(4\pi x + 2)$ hat die Periode

$$\square\ 4\pi \qquad \square\ 4 \qquad \square\ 2 \qquad \square\ \frac{1}{4\pi} \qquad \square\ \frac{1}{2}\ .$$

ii) Die Fourier-Reihe einer geraden Funktionen ist eine

☐ reine Sinusreihe ☐ reine Kosinusreihe ☐ Reihe mit Sinus- und Kosinustermen .

iii) Ist f periodisch mit der Periode 2π und auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ stückweise stetig differenzierbar bis auf eine Unstetigkeitsstelle $x_0 \in (0, 2\pi)$, so konvergiert ihre Fourier-Reihe in x_0 gegen

$$\square\ \lim_{x\downarrow x_0} f(x) \qquad \square\ \lim_{x\uparrow x_0} f(x) \qquad \square\ \frac{1}{2}\left\{\lim_{x\downarrow x_0} f(x) + \lim_{x\uparrow x_0} f(x)\right\} \qquad \square\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx\ .$$

Aufgabe 14 (Fourier-Entwicklung)
Gegeben sei die 2π-periodische Funktion $\tilde{f} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x) = |\sin x|$. Skizzieren Sie f und bestimmen Sie die Fourier-Reihe.

Hausübung

Aufgabe H12 (Fourier-Entwicklung) (1+2+2 Punkte)
Betrachten Sie die 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ für alle $x \in [-\pi, \pi)$.

(a) Skizzieren Sie die Funktion auf dem Intervall $[-3\pi, 3\pi]$.

(b) Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten von f.

(c) Berechnen Sie mit Hilfe der Fourierreihe den Wert der alternierenden Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

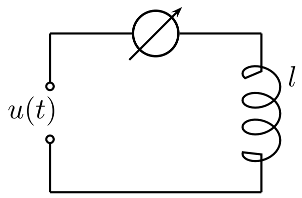
Aufgabe H13 (Schaltkreis zum analogen Integrieren) (1+2+2 Punkte)

Experimentell wurden für Situationen wie die nachfolgende folgende Zusammenhänge zwischen Spannung und Stromstärke festgestellt:
1. $i(t)$ geht linear aus $u(t)$ hervor,
2. falls $u(t) = u_0 \cos \omega t$ dann ist $i(t) = \frac{u_0}{\omega l} \sin \omega t \quad$ für alle $\omega \in \mathbb{R}$.

Der nun zu untersuchende Schaltkreis besteht aus einer Spannungsquelle mit zeitabhängiger Spannung $u(t)$, einem Strommessgerät und einer Spule mit der Induktivität l. Es sei $i(t)$ die gemessene Stromstärke (siehe Skizze).

Gegeben sei der L-periodische Spannungsverlauf

$$u(t) = \begin{cases} u_0, & |t| \leq \frac{L}{4} \\ -u_0, & \frac{L}{4} < |t| \leq \frac{L}{2} \end{cases}$$



(a) Skizzieren Sie $u(t)$ und entwickeln Sie es anschließend in eine Fourier-Reihe. *Tip:* Im Skript finden Sie unter 2.8 Hinweise zum Vorgehen bei von 2π-verschiedener Periode.

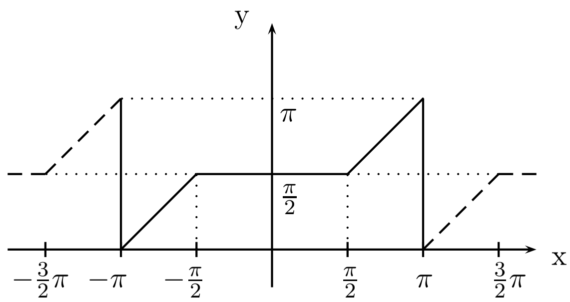
(b) Geben Sie $i(t)$ in einer Fourierdarstellung an. Benutzen Sie dabei den vorangehenden Aufgabenteil und Zusammenhang 2., indem Sie die Fourierreihe vorher mittels 1. in geeignete Summanden zerlegt haben.

(c) Seien ab nun $u_0 = 240V$, $l = 10mH$ und $L = 1ms$. Geben Sie für diesen Fall die Fourier-Reihe von $u(t)$ und $i(t)$ an.

(d) *Freiwillige Zusatzaufgabe:* Skizzieren Sie $i(t)$ aus dem vorherigen Aufgabenteil näherungsweise (das heisst, brechen Sie die Fourierreihe nach einer endlichen Anzahl Summanden ab). Verwenden Sie hierzu einen Computer!

Aufgabe H14 (Fourier-Entwicklung) (4x1 Punkte)

Die 2π-periodische Funktion f sei durch die folgende Skizze gegeben.



i) Skizzieren Sie die Funktion $\tilde{f}(x) = f(x) - \frac{\pi}{2}$.

ii) Welche Symmetrieeigenschaften hat die Funktion $\tilde{f}$?

iii) Bestimmen Sie die Fourier-Reihe der Funktion $\tilde{f}$.

iv) Bestimmen Sie die Fourier-Reihe der Funktion f mit Hilfe Ihres Resultats aus iii).

Aufgabe H15 (Fourier-Entwicklung) (1+1 Punkte)

Bestimmen Sie (mit höchstens vier Zeilen Rechnung) die Fourier-Reihen der Funktionen

$$f(x) = \sin^2 x, \quad g(x) = \cos^2 x, \quad x \in \mathbb{R} \; .$$

Hinweis: Es gelten $\sin^2 + \cos^2 = 1$ und $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$.