Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. U. Reif
R. Hartmann
J. Mehnert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 10
03.05.2010

3. Übungsblatt zur „Mathematik II für MB“

Aufgabe 8 (Taylorentwicklung)

Bestimmen Sie jeweils die Taylorreihe von f im Entwicklungspunkt x_0:

i) $f(x) = (x-1)^3 - x^2 + 2x - 1$ mit $x_0 = 1$,

ii) $f(x) := \frac{1}{1-x^4}$ mit $x_0 = 0$,

iii) $f(x) := e^{2(5-x)^3}$ mit $x_0 = 5$,

iv) $f(x) := \sin(2x - \pi) + \cos\big((x - \frac{1}{2}\pi)^3\big)$ mit $x_0 = \frac{1}{2}\pi$.

Aufgabe 9 (Taylorentwicklung)

Berechnen Sie die Taylorpolynome durch Verwendung bekannter Taylorreihen:

$$\text{i)} \quad T_7\left(\frac{\ln(x+1)}{x^2+1}\right) \qquad \text{mit } x_0 = 0 \qquad \text{ii)} \quad T_4(\sin(\ln(x+1))) \qquad \text{mit } x_0 = 0 \ .$$

Aufgabe 10 (Taylorentwicklung eines Integrales)

Sei $f(x) = \frac{1}{1-x}$ mit $I_f = (-1, 1)$. Bestimmen Sie $T_{1000}(F(x))$ der in $(-1, 1)$ definierten Funktion

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt \quad \text{um } x_0 = 0 \ .$$

Aufgabe 11 (Landausymbole)

Bestimmen Sie jeweils das größte $\alpha \in \mathbb{N}$, sodass die folgenden Gleichungen gelten:

$$\text{i)} \quad \sqrt{1+x} = O(x^\alpha) \qquad\qquad \text{ii)} \quad \sin x = O(x^\alpha)$$

$$\text{iii)} \quad \tan x = O(x^\alpha) \qquad\qquad \text{iv)} \quad e^{(x^7)} - e^0 = O(x^\alpha) \ .$$

Hausübung

Aufgabe H8 (Taylorentwicklung I) (1+2 Punkte)

Berechnen Sie die Taylorpolynome durch Verwendung bekannter Taylorreihen:

i) $T_5(\frac{1}{\cos x})$ mit $x_0 = 0$ ii) $T_3(e^{\sin x})$ mit $x_0 = 0$ iii) $T_4(\cos(\ln(1+x)))$ mit $x_0 = 0$.

Aufgabe H9 (Taylorentwicklung eines Integrales) (2 Punkte)

Sei $f(t) = e^{-t^2}$. Bestimmen Sie $T_6 F(x)$ der Funktion

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \quad \text{um } x_0 = 0 \ .$$

Aufgabe H10 (Taylorentwicklung und Extrema) (2+2 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \ln(1+x^2) + \cos(\alpha x)$$

mit einem reellen Parameter α.

i) Berechnen Sie $T_5(f(x))$ an der Entwicklungsstelle $x_0 = 0$.

ii) Untersuchen Sie f in x_0 auf ein lokales Extremum in Abhängigkeit von α. Unterscheiden Sie dabei für α drei Fälle!

Aufgabe H11 (Bestimmung von Grenzwerten) (4x1 Punkte)

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte ohne Verwendung der Regel von l'Hospital:

i) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$, ii) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)-1}{3\sin^2 x}$, iii) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{\ln(1+x^3)}$.

iv) $\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot\sinh x - x^2}{x^4}$

Berechnen Sie zum Vergleich den vorletzten Grenzwert mit der Regel von L'Hospital.