Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. U. Reif
R. Hartmann
J. Mehnert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 10
26.04.2010

2. Übungsblatt zur „Mathematik II für MB“

Aufgabe 4 (Konvergenzradii & -bereiche I)

Geben Sie für die folgenden Potenzreihen jeweils den Entwicklungspunkt x_0 und die Koeffizientenfolge $a_0, \ldots, a_5$ an. Bestimmen Sie außerdem jeweils den Konvergenzradius und -gebiet.

i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$,

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{ne^n}(x-1)^n$,

iii) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{\ln(n)}$,

iv) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 5^n (x-2)^n$,

Aufgabe 5 (Taylorentwicklung I)

Berechnen Sie die Taylorreihen der folgenden Funktionen mit den angegebenen Entwicklungspunkten x_0 . Bestimmen Sie den jeweiligen Konvergenzradius.

i) $\sin x$ mit $x_0 = \pi/2$

ii) $1 + x - 2x^2$ mit $x_0 = 1$

iii) $\sqrt{1+x}$ mit $x_0 = 0$

iv) $\sqrt{x}$ mit $x_0 = 1$

Aufgabe 6 (Taylorentwicklung II)

i) Berechnen Sie die Taylorreihe der Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x}$ im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

ii) Bestimmen Sie nun die Taylorreihen der Funktionen $g(x) = \frac{x}{1+x}$ und $h(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ mithilfe Ihres Resultats aus i), ohne erneut die Taylorformel anzuwenden.

Aufgabe 7 (Taylorentwicklung und Integration)

Bestimmen Sie das folgende Integral

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx$$

durch Integration des entsprechenden Taylorpolynoms bis auf einen maximalen Fehler von 10^{-2}.

Hausübung

Aufgabe H4 (Konvergenzradii & -bereiche I) (1+1+1+1 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils den Konvergenzbereich der folgenden Potenzreihen:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n})^n \, x^n$,

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!} \, (x-3)^n$,

iii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n (x+1)^{3n}}{2}$,

iv) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \, x^{2n+1}$.

Aufgabe H5 (Taylorentwicklung) (2+2 Punkte)

Berechnen Sie die Taylorentwicklungen der Funktionen $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ und $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Aufgabe H6 (Taylorentwicklung und Integration) (2 Punkte)

Bestimmen Sie die Taylor-Reihe der Funktion

$$f\colon (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{8x}{4x^2 - 1}$$

im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Hinweis: Betrachte $\int f(x)dx$ und verwende $\ln(1+y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} y^k$.

Aufgabe H7 (Taylorentwicklung und Restglied) (3 Punkte)

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \sin(3x)\,.$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom 3-ter Ordnung mit Entwicklungspunkt $x_0 = \pi$. Schätzen Sie den Fehler für $x = \frac{3\pi}{4}$.