Prof. U. Reif
R. Hartmann, J. Mehnert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS2010
19.04.2010

Mathematik II für MB

1. Übung

Präsenzaufgaben

P1 Funktionenfolgen I

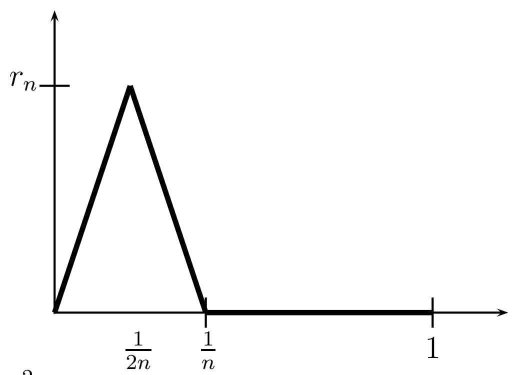
Bestimmen Sie den punktweisen Grenzwert der folgenden Funktionenfolgen:

i) $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n},\ x \in \mathbb{R}$ ii) $f_n(x) = nxe^{-nx},\ x \in \mathbb{R}^+$

iii) $f_n(x) = nxe^{-nx},\ x \in \mathbb{R}^-$ iv) $f_n(x) = \sqrt[n]{x},\ x \in \mathbb{R}_0^+$

P2 Funktionenfolgen & Integration

Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei wie in der folgenden Skizze gegeben:



Betrachten Sie den Fall $r_n = n^2$.

i) Geben Sie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ explizit an.

ii) Berechnen Sie den punktweisen Grenzwert $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig?

iii) Vergleichen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \quad \text{und} \quad \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx\ .$$

Erklären Sie Ihre Beobachtung.

Führen Sie Ihre Untersuchungen nun für die Fälle $r_n = n$ und $r_n = 1$ durch. Diskutieren Sie insbesondere die Vertauschbarkeit von Grenzwert und Integration. Finden Sie eine Folge r_n, sodass f_n gleichmäßig konvergiert.

P3 Funktionenreihen I: differenzieren & integrieren

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die Funktion $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $D(f_n) = [0, \infty)$ und

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n^2}.$$

a) Zeigen Sie, daß die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ auf $[0, \infty)$ punktweise und gleichmäßig konvergiert.

b) Berechnen Sie $\int_0^1 g(x)\,dx$, wobei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $D(g) = [0, \infty)$ und

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

die Summe der Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ist.

c) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$?

Hausaufgaben

H1 Funktionenfolgen II 4 Punkte

Bestimmen Sie den punktweisen Grenzwert der folgenden Funktionenfolgen:

i) $f_n(x) = \arctan(x - n), \quad x \in \mathbb{R}$

ii) $f_n(x) = n(x - n + |x - n|), \quad x \in \mathbb{R}_0^+$

iii) $f_n(x) = \arctan(nx), \quad x \in \mathbb{R}$

iv) $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + nx}, \quad x \in \mathbb{R}$.

H2 Funktionenfolgen III $1 + 2 + 2$ Punkte

Betrachten Sie die Funktionenfolge

$$f_n(x) = nx(1 - x)^n \text{ auf } [0, 1] \ .$$

a) Berechnen Sie $f_n(0)$ und $f_n(1)$ sowie den punktweisen Grenzwert der Funktionenfolge.

b) Bestimmen Sie die Folge der Maximalwerte $f_n(x_n)$, wobei die Funktion f_n jeweils an der Stelle x_n ihr lokales Maximum annimmt. Berechnen Sie insbesondere $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_n)$.

c) Entscheiden Sie nun, ob die Folge $f_n(x)$ gleichmäßig konvergiert.

H3 Funktionenreihen II: Differenzieren 2+2 Punkte

a) Zeigen Sie, dass die Funktionenreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + \frac{1}{x^n}), \qquad x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$$

punktweise und gleichmäßig konvergiert. Gehen Sie wie folgt mit dem Majorantenkriterium vor:

1. Schätzen Sie den Betrag der Summanden auf eine von x unabhängige Folge c_n ab.
2. Die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ lässt sich z.B. mit dem Quotientenkriterium zeigen.

b) Begründen Sie durch explizites Verweisen auf die relevanten Stellen im Skript, warum die dadurch gegebene Funktion stetig und differenzierbar ist. Berechnen Sie die Ableitung.