13.07.10

Probe-Klausur Mathematik II für MB, MPE, WI/MB, BSc. WI/MB, BSc. Angew. Mech., WI/MB(APO) und Vermessungswesen

Name: .... Matrikelnr.: ....

Vorname: .... Studiengang: ....

	Aufg. 1	Aufg. 2	Aufg. 3	Bonus	Summe	Note
Punkte			—	—		—

vor dem Abgeben wäre hier zu falten

Bearbeitungszeit: 60 Minuten (für 2 Aufgaben).

Hilfsmittel: Die einzigen erlaubten Hilfsmittel sind vier eigenhändig beschriebene Blätter im Format DIN A 4. Taschenrechner, Handys oder andere elektronische Geräte sind **auszuschalten** und in einer Tasche zu verstauen. Ein Verstoß gegen diese Regel wird als Täuschungsversuch gewertet.

Lösungstabelle für Aufgabe 1:

1)	2)	3)	4)	5)	6)	7)	8)	9)	10)	11)	12)	13)	14)	15)	16)

Lösungstabelle für Aufgabe 2:

1)	$a_1 =$	$b_7 =$
2)	$F(x) =$	$\int_0 1 f(x)\,dx =$
3)	$R =$	$I_p =$
4)	$a_3 =$	$f'''(0) =$
5)	$W =$	
6)	$T_3 f(x,y) =$	
7)	$DF(0,1,2) =$	
8)	$\varphi(x,y) =$	

Aufgabe 1 [16 Punkte]

Bei dieser Aufgabe ist jeweils genau eine Antwort richtig. Tragen Sie die Lösungsbuchstaben in die Tabelle auf Seite 2 ein. **Es werden nur diese Eintragungen bewertet.** Rechenwege sind nicht verlangt.
Lesen Sie den Aufgabentext sorgfältig; insbesondere wird gelegentlich danach gefragt, welche Aussage **nicht** zutrifft.
Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche Antwort wird ein halber Punkt abgezogen, eine fehlende Antwort ergibt weder Punkt noch Abzug. Wenn das Gesamtergebnis negativ ist, dann geht Aufgabe 1 mit Null Punkten in die Klausurwertung ein.

1) Eine Stammfunktion der Funktion $f(x) = 3/x,\ x > 0$, ist gegeben durch
a) $F(x) = \ln(3 + x)$ b) $F(x) = \ln(x/3)$ c) $F(x) = \ln(x^3)$ d) $F(x) = \ln(3x)$

2) Das uneigentliche Integral $\int_1^\infty \frac{e^{\alpha x}}{x^\alpha}\, dx$ konvergiert für
a) $\alpha < 0$ b) $\alpha \leq 0$ c) $\alpha > 0$ d) $\alpha \geq 0$

3) Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**? Eine Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ ist differenzierbar im Punkt $t_0 = 0$, wenn
a) alle Koordinatenfunktionen differenzierbar sind.
b) der Grenzwert $\lim\limits_{h\to 0} h^{-1}(F(h) - F(0))$ existiert.
c) es einen Vektor $G \in \mathbb{R}^n$ gibt mit $\lim\limits_{h\to 0} h^{-1}(F(h) - F(0) - hG) = 0$.
d) es einen Vektor $G \in \mathbb{R}^n$ gibt mit $\lim\limits_{h\to 0} h\,(F(h) - F(0) - hG) = 0$.

4) Die Funktionenreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{-n}$ konvergiert für
a) $|x| < 1$ gegen $x/(1 - x)$ b) $|x| > 1$ gegen $x/(x + 1)$
c) $|x| > 1$ gegen $x/(x - 1)$ d) $|x| > 1$ gegen $1/(1 - x)$

5) Gegeben seien die differenzierbaren Funktionen $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ und $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$. Die Kettenregel zur Bestimmung der Ableitung der Funktion $H = F \circ G$ lautet
a) $DH(X) = DF(X) \cdot DG(X)$ b) $DH(X) = DF(DG(X))$
c) $DH(X) = DF(DG(X)) \cdot G(X)$ d) $DH(X) = DF(G(X)) \cdot DG(X)$

6) Die Funktion $f(x) = \sin x + \sinh x - 2x$ hat an der Stelle $x_0 = 0$
a) ein lokales Minimum b) ein lokales Maximum
c) einen Wendepunkt d) keine horizontale Tangente

7) Sei $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\in\mathbb{N}}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ eine trigonometrische Reihe und sei $g(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} c_n x^n$ eine Potenzreihe. Sowohl f als auch g seien auf ganz $\mathbb{R}$ punktweise konvergent. Dann gilt stets:
a) f ist stetig. b) g ist stetig.
c) f ist beschränkt. d) g ist beschränkt.

8) Die Menge $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$ ist

a) kompakt   b) offen   c) abgeschlossen   d) beschränkt

9) Seien f und g differenzierbare Funktionen von $\mathbb{R}^m$ nach $\mathbb{R}$. Dann gilt folgende Aussage **nicht**:

a) $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$ b) $\nabla(fg) = \nabla f \cdot \nabla g$

c) $\nabla(fg) = \nabla(gf)$ d) $\nabla(f+g) = \nabla(g+f)$

10) Sei A eine symmetrische $(n \times n)$-Matrix und $f(X) = X^T AX$. Dann gilt

a) $\nabla f(X) = 2X^T A$ b) $\nabla f(X) = A^T X$

c) $\nabla f(X) = X^T(A + A^T)X$ d) $\nabla f(X) = (X + X^T)A$

11) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $g(t) := f(t, -t)$. Dann gilt

a) $g'(t) = f_x(t,-t) + f_y(t,-t)$ b) $g'(t) = f_x(t,-t) - f_y(t,-t)$

c) $g'(t) = tf_x(t,-t) + tf_y(t,-t)$ d) $g'(t) = tf_x(t,-t) - tf_y(t,-t)$

12) Die Funktion $f(x,y,z) := xyz$ hat an der Stelle $(0,0,0)$

a) ein Minimum   b) ein Maximum

c) einen Sattelpunkt   d) keinen kritischen Punkt

13) Der Wert des Integrals $\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2t \, dt$ ist

a) 0   b) 1/2   c) $\pi/2$ d) π

14) Sei φ ein Potenzial des Vektorfeldes F und $W = \int_a^b F(X(t)) \cdot X'(t)\, dt$ das Arbeitsintegral von F entlang der Kurve $X(t), t \in [a,b]$. Dann gilt

a) $W = \varphi(F(X(b))) - \varphi(F(X(a)))$ b) $W = \varphi(F(b)) - \varphi(F(a))$

c) $W = \varphi(b) - \varphi(a)$ d) $W = \varphi(X(b)) - \varphi(X(a))$

15) Bezeichne Tf die Taylor-Reihe und $T_n f$ das n-te Taylorpolynom der glatten Funktion f zum Entwicklungspunkt x_0. Weiter sei R_n das n-te Restglied. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen **falsch**:

a) $T_n f(x)$ konvergiert gegen $f(x)$.

b) $T_n f(x_0)$ konvergiert gegen $f(x_0)$.

c) $T_n f(x)$ konvergiert gegen $Tf(x)$.

d) $Tf(x) = f(x)$, falls $R_n(x)$ gegen 0 konvergiert.

16) Eine symmetrische (2×2)-Matrix ist **indefinit**, wenn

a) alle Einträge negativ sind.

b) die Summe der Eigenwerte negativ ist.

c) das Produkt der Eigenwerte negativ ist.

d) beide Eigenwerte negativ sind.

Aufgabe 2 [16 Punkte]

Lösen Sie die folgenden Aufgaben und tragen Sie die Ergebnisse in die entsprechenden Kästchen auf Seite 2 ein. Rechenwege sind nicht verlangt und werden auch nicht bewertet.

1) Gegeben sei die 2π-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = |x| \text{ für } -\pi \le x < \pi.$$

Bestimmen Sie für die zugehörigen Fourierreihe

$$\mathcal{F}f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

die Koeffizienten a_1 und b_7.

2) Sei $f(x) = 2x\ln(x), x > 0$. Geben Sie eine Stammfunktion F von f an und berechnen Sie damit den Wert des (uneigentlichen) Integrals $\int_0^1 f(x)\,dx$.

3) Bestimmen Sie für die Potenzreihe $p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}$ den Konvergenzradius R sowie die Menge I_p aller Punkte, für die die Reihe konvergiert.

4) Sei $f(x) = \sin(x+x^3)$ und $Tf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ die zugehörige Taylor-Reihe im Punkt $x_0 = 0$. Bestimmen Sie a_3 sowie $f'''(0)$.

5) Gegeben sei die Kurve $X(t) = [\sin t,\, \cos t]^T, t \in [0, \pi]$. Berechnen Sie den Wert

$$W = \int_X F \cdot dX$$

des Arbeitsintegrals entlang dieser Kurve für das Vektorfeld

$$F(x, y) = [1 + y, -x]^T.$$

6) Geben Sie das quadratische Taylor-Polynom $T_3 f$ der Funktion $f(x, y) = \frac{2}{\cos(x-y)}$ im Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0, 0)$ an.

7) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $F(x, y, z) = \begin{bmatrix} y\arctan(2x) \\ \sinh(x) + 2\ln(y/z) \end{bmatrix}$ an der Stelle $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 2)$.

8) Geben Sie ein Potenzial φ des Vektorfelds $F(x, y) = \begin{bmatrix} y/x \\ 1 + \ln(x) \end{bmatrix}$ an, wobei $x, y > 0$.