Fachbereich Mathematik
Prof. R. Hemmecke
Yong He
04.12.2008

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

# 4. Übung zu Lineare Algebra f. Ph.

**Aufgabe 9 – Minitest:**

In dieser Aufgabe sei $V$ der reelle Vektorraum $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 0$.
Welche der folgenden Aussagen ist richtig? Begründen Sie Ihre Antwort.

1) Seien $u, v \in V$ mit $u, v \neq 0$. Dann ist die lineare Hülle $W := \text{lin}(\{u, v\})$ ein Unterraum von $V$.
2) Es gibt insgesamt $n + 1$ erzeugende Systeme von $V$.
3) Die Menge $\{2008\}$ ist ein erzeugendes System von $\mathbb{R}$.
4) Jedes lineare inhomogene Gleichungssystem in $V$ besitzt eine Lösung.
5) Jedes lineare homogene Gleichungssystem, das mindesten zwei Lösungen in $V$ hat, hat unendlich viele.
6) 0 ist eine Lösung von jedem linearen homogenen Gleichungssystem in $V$.
7) Die Menge aller Lösungen jedes linearen inhomogenen Gleichungssystems ist ein Untervektorraum in $V$.
8) Ein aus $n$ Variablen und $n$ Gleichungen bestehendes lineares Gleichungssystem kann höchstens $n$ lineare unabhängige Lösungen besitzen.

**Lösung:**

1) Richtig.
2) Falsch, es gibt unendlich viele erzeugende Systeme von $V$.
3) Richtig.
4) Falsch.
5) Richtig.
6) Richtig.
7) Falsch. Dies gilt nur für die homogenen Fälle.
8) Richtig.

**Aufgabe 10 – Lineare Gleichungssysteme:**

Sei $(\mathbb{K}, +, \cdot, 0, 1)$ ein Körper und $\alpha_1, \alpha_2, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

1) Wir betrachten die Gleichung $\alpha x = \beta$ in $\mathbb{K}$.
   a) Für welche $\alpha, \beta$ besitzt die Gleichung eine eindeutige Lösung?
   b) Für welche $\alpha, \beta$ besitzt die Gleichung keine Lösung?
   c) Für welche $\alpha, \beta$ besitzt die Gleichung unendlich viele Lösungen?

Hinweis: Es gibt $2^2 = 4$ Fallunterscheidungen.

2) Betrachten wir die Gleichung $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \beta$ in $\mathbb{K}^2$

   a) Für welche $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ besitzt die Gleichung eine eindeutige Lösung?
   b) Für welche $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ besitzt die Gleichung keine Lösung?
   c) Für welche $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ besitzt die Gleichung unendlich viele Lösungen?
   d) Sei $\mathbb{K}^2 = \mathbb{R}^2$. Skizzieren Sie jeweils die Lösungsmengen.

Hinweis: Es gibt $2^3 = 8$ Fallunterscheidungen.

**Lösung:**

1) Betrachten wir die Gleichung $\alpha x = \beta$ in $\mathbb{K}$.

   a) Eine eindeutige Lösung: Wenn $\alpha \neq 0$ wir erhalten $x = \frac{\beta}{\alpha}$.
   b) Wenn $\alpha = 0$ und $\beta \neq 0$ besitzt die Gleichung keine Lösung.
   c) Wenn $\alpha = 0$ und $\beta = 0$ besitzt die Gleichung unendlich viele Lösungen, nämlich $\mathbb{R}$.

2) Betrachten wir die Gleichung $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \beta$ in $\mathbb{K}^2$

   a) Zwei Variable und eine Gleichung. Daher falls sie eine lösung besitzt, so ist die Lösung nicht eindeutig.
   b) Wenn $\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \beta \neq 0$, besitzt die Gleichung keine Lösung.
   c) Wenn $\alpha_1 \neq 0$, für beliebiges $x_2 = \lambda \in \mathbb{K}$ setzte $x_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\lambda + \frac{\beta}{\alpha_1}$. Dann ist die Lösungsmenge
   $$\{\begin{pmatrix} -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\lambda + \frac{\beta}{\alpha_1} \\ \lambda \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{K}\}$$
   eine gerade in $\mathbb{K}^2$ mit Richtungsvektor $(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}, 1)^t$, die durch den Punkt $(\frac{\beta}{\alpha_1}, 0)^t$ geht. Falls zusätzlich $\beta = 0$ geht diese Gerade durch den Ursprung.

   Wenn $\alpha_1 = 0$ und $\alpha_2 \neq 0$ dann ist $x_2 = \frac{\beta}{\alpha_2}$. Die Lösungsmenge
   $$\{\begin{pmatrix} \lambda \\ \frac{\beta}{\alpha_2} \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{K}\}$$
   ist eine Gerade in $\mathbb{K}^2$ paralell zu $(1, 0)^t$, die durch den Punkt $(0, \frac{\beta}{\alpha_2})^t$ geht. Falls zusätzlich $\beta = 0$ so die Lösungsmenge die $x_1$-Achse.

   Wenn $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta = 0$, so ist das $\mathbb{K}^2$ die Lösungsmenge.

## Aufgabe 11 – Basis:

Im $\mathbb{R}^3$ betrachten wir die Untervektorräume

$$U := \operatorname{lin}\{(1,0,-1)^t, (-1,1,0)^t\}, \quad V := \{(x_1,x_2,x_3)^t \in \mathbb{R}^3 \colon x_2 + x_3 = 0\}$$

1) Bestimmen Sie jeweils eine Basis von $U$, $V$, $U \cap V$, $U + V$.

2) Welche Dimension hat $U + V$.

## Lösung:

1) Es ist zu sehen, dass $V = \operatorname{lin}\{(0,1,0)^t, (0,0,1)^t\}$. Ferner $(0,1,-1)^t \in U \cap V$ und $\lambda \cdot (0,1,-1)^t \in U \cap V$. $U + V = \mathbb{R}^3$.

2) $\dim(U) = 2$, $\dim(V) = 2$, $\dim(U \cap V) = 1$. Nach Dimensionsformel für Untervektorräume gilt es: $\dim(U + V) = 3$.

## Hausaufgabe 10 – Untervektorräume:

Es sei $V = \mathbb{Q}^4$ (mit Zeilenvektoren als Elemente),

$$M := \{(1,2,3,4), (2,0,1,-1), (1,1,1,1), (1,0,0,-1)\} \subseteq V,$$

$U = \operatorname{lin}(M)$ der von den Vektoren in $M$ erzeugte Untervektorraum von $V$ sowie $v = (1,-1,0,2)$ und $w = (1,0,0,2)$. Überprüfen Sie, ob $v$ und $w$ in $U$ enthalten sind.

## Hausaufgabe 11 – Lineare Gleichungssysteme:

(i) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem über $\mathbb{R}$ mit Hilfe des Gauß-Algorithmus. Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ hat es keine, genau eine bzw. unendlich viele Lösungen?

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & + & a^2x_2 & + & 2x_3 & = & a \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}$$

(ii) Es sei ein inhomogenes lineares Gleichungssystem über $\mathbb{R}$ mit $k$ Gleichungen und in $k+1$ Variablen gegeben. Wie kann sich die Anzahl der Lösungen dieses Systems ändern, wenn man eine Gleichung hinzunimmt?

(iii) Was ändert sich, wenn das System jetzt homogen ist und eine homogene Gleichung hinzukommt?

## Hausaufgabe 12 – Lineare Unabhängigkeit:

Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Vektoren $u = (\alpha^2, 1, \beta)$, $v = (\beta, -1, 1)$ linear unabhängig?