Fachbereich Mathematik
Prof. R. Hemmecke
Yong He
18.12.2008

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

5. Übung zu Lineare Algebra f. Ph.

Aufgabe 12 – Minitest:

In dieser Aufgabe sei V der reelle Vektorraum $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 0$.
Welche der folgenden Aussagen ist richtig? Begründen Sie Ihre Antwort.

1) Die Lösungsmenge jedes linearen Gleichungssystems ändert sich nicht, wenn man von einer Gleichung das λ-fache einer anderen Gleichung substrahiert.
2) Jedes lineare Gleichungssystem läßt sich durch äquivalente Umformungen auf Stufenform bringen.
3) Es gibt ein L.G.S, sodass der Rang der Stufenform $n + 1$ ist.
4) In Stufenform ist die Anzahl der Pivotvariablen gleich dem Rang.
5) Die Anzahl der Pivotvariablen ist die maximale Anzahl der linear unabhängigen Vektoren des Lösungsraums.
6) Besitzt ein L.G.S eine eindeutige Lösung, so sind die Koeffizientenvektoren linear unabhängig.
7) Ist $U \subset V$ ein Unterraum und $x \in V$, so gibt es ein L.G.S, dessen Lösungsmenge genau $x + U := \{x + y : y \in U\}$ ist.

Lösung:

1) Richtig.
2) Richtig
3) Falsch. Der Rang der Stufenform kann höchstens n sein.
4) Richtig.
5) Falsch. Die Anzahl der Pivotvaiablen + die Dimension des Lösungsraums = n.
6) Richtig.
7) Richtig.

Aufgabe 13 – Der Gauß-Jordan Algorithmus:

Sei $(V, \mathbb{K})$ ein n-dimensionaler Vektorraum. Ferner sei die Zeilenstufenform eines linearen Gleichungssystems gegeben durch

$$\begin{aligned} c_{1j_1}x_{j_1} + c_{1j_2}x_{j_2} + \ldots + c_{1n}x_n &= d_1 \\ c_{2j_2}x_{j_2} + \ldots + c_{2n}x_n &= d_2 \\ &\vdots \\ c_{rj_r}x_{j_r} + c_{rn}x_n &= d_r \\ 0 &= d_{r+1} \\ &\vdots \\ 0 &= d_m \end{aligned}$$

Angenommen $r < n$, wir betrachten den homogenen Fall, d.h. $d_1 = d_2 = ... = d_m = 0$. Mit $B := \{b_1, ..., b_{n-r}\}$ bezeichnen wir die in der Vorlesung konstruierte Basis.

Beweisen Sie: B ist eine Basis des Lösungsraums des linearen Gleichungssystems.
Beweis: Die lösungsmenge des angegebenen homogenen Gleichungssystem bildet einen Vektorraum mit Dimension $n-r$ (Warum?). Wählen wir beliebige Werte aus $\mathbb{K}$ für jede der $n-r$ Nicht-Pivotvariablen. Wir lösen danach die r-te Gleichung auf und erhalten

$$x_{j_r} = c_{rj_r}^{-1}(-c_{rj_{r+1}}x_{r+1} - ... - c_{r_n}x_n)$$

Danach die $(r-1)$-te Gleichung usw. Für $k \in \{1, ..., r\}$ erhalten wir

$$x_{j_k} = c_{kj_k}^{-1}(c_{(k+1)j_{k+1}}x_{j_{k+1}} - ... - c_{rj_{r+1}}x_{r+1} - ... - c_{r_n}x_n) \qquad (*)$$

Jeder Eintrag des Vektors

$$x := \begin{pmatrix} x_{j1} \\ \vdots \\ x_{jr} \\ \vdots \\ x_{jn} \end{pmatrix}$$

ist eine lineare Kombination von den $n-r$ Unbekannten $\{x_{r+1}, ..., x_n\}$. Somit läßt sich aus x einen $n-r$ dimensionalen Vektorraum L aufspannen. Jedes Element aus L ist nach der Konstruktion eine Lösung des L.G.S. $\square$

Aufgabe 14 – Lineare Gleichungssysteme:

1) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem über $\mathbb{R}$ mittels Gauss-Jordan-Algorithmus.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 1 \\ 5x_1 & + & 6x_2 & + & 7x_3 & + & 8x_4 & = & 1 \\ 9x_1 & + & 10x_2 & + & 11x_3 & + & 12x_4 & = & 1 \end{array}$$

2) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$ in Abhängigkeit von $r \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} r \cdot x + \quad y + \quad z &= 1 \\ x + r \cdot y + \quad z &= 1 \\ x + \quad y + r \cdot z &= 1 \end{aligned}$$

Lösung:

1) Die Stufenform lautet

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 1 \\ & - & 4x_2 & - & 8x_3 & - & 12x_4 & = & -4 \\ & & & & & & x_4 & = & 0 \end{array}$$

Also erhalten wir $x_4 = 0$. Im verbleibenden System

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ & - & 4x_2 & - & 8x_3 & = & -4 \end{array}$$

können wir eine Nicht-Pivot-Variable frei wählen., sei z.B. $x_3 \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann folgt aus der ersten Gleichung $x_2 = 1 - 2t$, $x_1 = -1 + t$.

2)
- Falls $r = 0$, so hat das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung $x = y = z = \frac{1}{2}$.
- Falls $r \neq 0$, so läßt sich das Gleichungssystem in die Stufenform bringen

$$\begin{aligned} r \cdot x + \quad & y + & z &= 1 \\ 0 + (\frac{r^2-1}{r}) \cdot y + \quad & (\frac{r-1}{r}) \cdot z &&= \frac{r-1}{r} \\ 0 + \quad & 0 + \frac{(r+2)(r-1)}{r+1} \cdot z &&= \frac{r-1}{r+1} \end{aligned}$$

Also erhalten wir $z = \frac{1}{r+2}$, in die zweite Gleichung einsetzten erhalten wir $y = \frac{1}{r+2}$. Also das Gleichungssystem besitzt eine eindeutige Lösung $x = y = z = \frac{1}{r+2}$.

Hausaufgabe 13 – Lineare Gleichungssysteme:

Gegeben sei ein LGS über $\mathbb{F}_3$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 0 &= 1 \\ 2x_1 + 0 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Lösen Sie das Gleichungssystem.
Lösung:

- Lösungsweg 1 Gauß-Jordan-Algorithmus.
- Lösungsweg 2. Aus der dritten Gleichung erhalten wir $x_1 + x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = 1 - x_3$. Dies zusammen mit der ersten Gleichung ergibt $x_2 + x_3 = 2 \Rightarrow x_2 = 2 - x_3$. Zusammen mit der zweiten Gleichung erhalten wir $2 - 3x_3 = 1 \Rightarrow 2 = 1$. $\lightning$. Das Gleichungssystem ist in $\mathbb{F}_3$ nicht lösbar.

Hausaufgabe 14 – Unterraum und Lösungensmenge eines LGS:

Beweisen Sie die Aussage 7) in Aufgabe 12. Skizzieren Sie die Aussage geometrisch.
Lösung:

1) Zeigen Sie: Jeder Unterrraum stellt die Lösungssmenge eines L.G.S. dar.
2) Der Raum $x + U$ ist die Lösungsmenge eines inhomogenen L.G.S.
3) Geometrisch bedeutet $x + U$ das Verschieben des Unterraums um x.