Fachbereich Mathematik
Prof. R. Hemmecke
Yong He
20.11.2008

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

3. Übung zu Lineare Algebra f. Ph.

Aufgabe 7 – Minitest:

In dieser Aufgabe sei V der reelle Vektorraum $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 0$.
Welche der folgenden Aussagen ist richtig? Begründen Sie Ihre Antwort.

1) Seien $u, v, w \in V$ mit $u, v, w \neq 0$. Ist u keine Linearkombination der Vektoren v, w, so sind u, v, w linear unabhängig.

2) Der Vektorraum V besitzt ein erzeugendes System S mit $n+1$ Elementen, d.h. $\text{lin}(S) = V$.

3) Es gibt $n+1$ linear unabhängigen Vektoren in V.

4) Seien $v_1, ..., v_{n+1} \in V$ beliebig. Dann bilden $(v_i)_{i\in\{1,...,n+1\}}$ ein erzeugendes System von V.

Lösung:

1) Falsch. Seien $V = \mathbb{R}^3$ und $u = (0,0,1)^t, v = (0,1,0)^t, w = (0,2,0)^t \neq 0$. So ist u keine Linearkombination der Vektoren v, w, dennoch sind u, v, w nicht linear unabhängig.

2) Richtig. Eine Basis B mit n Vektoren ist ein minimales erzeugendes System. Wenn wir einen beliebigen Vektor zu B hinzufügen, so bleibt B immer noch ein erzeugendes System.

3) Falsch. Es kann nicht $n+1$ lineare unabhängigen Vektoren in V geben während $\dim(V) = n$.

4) Falsch. Seien $v_1 = (1, ..., 0)^t, ..., v_n = (n, ..., 0)^t$. Diese Vektoren sind linear abhängig.

Aufgabe 8 – Lineare Unabhängigkeit, Basen:

1. Zeigen Sie, dass die folgenden Familien von Vektoren linear unabhängig sind. Welche sind Basen, d.h. minimale (bzgl. der Inklusion) erzeugende Systeme?

   (a)
   $$\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \in \mathbb{R}^3$$

   (b)
   $$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \in (\mathbb{F}_2)^3$$

   (c)
   $$\left[\begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \in \mathbb{R}^2$$

2. Wir betrachten die Menge $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) := \left\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\right\} \subset \mathbb{R}$ (vgl. Aufgabe 5) als Vektorraum über dem Körper $\mathbb{Q}$. Untersuchen Sie die folgenden Vektoren aus $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ auf lineare Unabhängigkeit.

   (a) 10 und $14 + \sqrt{2}$, (b) $6 + \sqrt{8}$ und $3 + \sqrt{2}$, (c) 5 und $7 + \sqrt{32} \cdot \sqrt{2}$

3. Seien $(a, b)^t$ und $(c, d)^t$ zwei Elemente des Vektorraumes $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass sie genau dann linear abhängig sind, wenn $ad - bc = 0$ ist.

4. (Vgl. Aufgabe 6) Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Beweisen Sie, dass die folgenden Paare von Vektoren $f, g \in V$ jeweils linear unabhängig sind. Welche darunter bilden eine Basis von V?

   (a) $f(x) = x$ und $g(x) = 1$
   (b) $f(x) = x$ und $g(x) = \sin(x)$
   (c)* $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = \sin(2x)$

Lösung:

1. **Definition**: Sei V ein K-Vektorraum. Eine endliche Familie $v_1, v_2, \ldots, v_n$ von Vektoren aus V heißt linear unabhängig, falls gilt: Sind $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K$ und ist

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \ \ldots\ + \lambda_n \cdot v_n = 0$$

so folgt

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

   (a) Die Vektoren sind nach der Definition linear unabhängig. Sie bilden keine Basis des $\mathbb{R}^3$.
   (b) Die Vektoren sind nach Definition linear unabhängig. Sie bilden eine Basis des $\mathbb{F}_2^3$.
   (c) Die Vektoren sind nach Definition linear unabhängig. Sie bilden eine Basis des $\mathbb{R}^2$.

2. Wir betrachten die Menge $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) := \left\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\right\} \subset \mathbb{R}$ (vgl. Aufgabe 5) als Vektorraum über dem Körper $\mathbb{Q}$. Untersuchen Sie die folgenden Vektoren aus $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right)$ auf lineare Unabhängigkeit.

   (a) Seien $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ und $10q_1 + 14\sqrt{2}q_2 = 0$.
   Daraus folgt: $\underbrace{10q_1 + 14q_2}_{rational} + \underbrace{\sqrt{2}q_2}_{irrational} = 0 \Longrightarrow q_1 = q_2 = 0.$
   (b) $6 + \sqrt{8}$ und $3 + \sqrt{2}$ sind linear abhängig.
   (c) 5 und $7 + \sqrt{32} \cdot \sqrt{2}$ sind linear abhängig.

3. **Beweis**: " $\Longrightarrow$ ": Sind $(a,b)^t$ und $(c,d)^t$ linear abhängig, so gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass $(a,b)^t = \lambda(c,d)^t \Longrightarrow ad - bc = 0$.
   " $\Longleftarrow$ ": Sei $ad - bc = 0$.
   - Fall 1: $a = b = c = d = 0 \Longrightarrow (a,b)^t$ und $(c,d)^t$ sind linear abhängig.
   - Fall 2: Sei O.B.d.A. $c \neq 0$. Dann $ad - bc = 0 \Longrightarrow \frac{ad}{c} = b$. Falls $b = 0$, so muss entweder $a = 0$ oder $d = 0$. Beide Fälle führen zur linearen Abhängigkeit von $(a,b)^t$ und $(c,d)^t$.
     Falls $b \neq 0$, dann folgt $a, d \neq 0$. Wir haben $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \lambda \in \mathbb{R}$. □

4. (a) $f(x) = x$ und $g(x) = 1$ sind linear unabhängig. Aus $\lambda f + \mu g = 0$ for alle $x \in \mathbb{R}$ folgt $\lambda = \mu = 0$.
   (b) Die Funktion $g(x) = \sin(x)$ ist durch $\{\pm 1\}$ beschränkt. Hingegn ist $f(x) = x$ unbeschränkt. Somit sind f, g linear unabhängig.
   (c)* $g(x) = \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$. Wären f, g linear abhängig, so gäbe es eine Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $g(x) = \lambda f(x)$.↯

Hausaufgabe 7 – Basen von Untervektorräumen:

Bestimmen Sie die Basen der folgenden Untervektorräume. Skizzieren Sie diese Räume.

1) $V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x = z \right\} \subset \mathbb{R}^3$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum.

2) $V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \colon x + y + z = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^3$ (als $\mathbb{R}$-Vektorraum).

3*) $V_3 = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 5+i \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-5i \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{C}^2$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum.

4*) $V_4 = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 5+i \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-5i \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{C}^2$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Hausaufgabe 8 – Untervektorräume:

Sei $n\mathbb{Z} = \{nm \colon m \in \mathbb{Z}\}$.

a) Zeigen Sie: $2\mathbb{Z}$, $3\mathbb{Z}$ sind Unterräume von $\mathbb{Z}$.

b) Zeigen Sie: $\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z}$.

Hausaufgabe 9 – Permutationsgruppe:

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 0$. Die Menge aller bijektiven Abbildungen $\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ ist eine Gruppe. Wir nennen sie symmetrische Gruppe S_n von $\{1, \dots, n\}$. Deren Elemente heißen *Permutationen* und können in der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

dargestellt werden.

1) Listen Sie die Elemente in S_1,S_2 und S_3 auf.

2) Wieviele Elemente hat S_n?