Fachbereich Mathematik
Prof. R. Hemmecke
Yong He
06.11.2008

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

2. Übung zu Lineare Algebra f. Ph.

Aufgabe 4 – Gruppen:

Seien $m \in \mathbb{N}$ mit $m \neq 0$, $\bar{a} := \{b \in \mathbb{Z}\colon b \mod m \equiv a\}$ und $Z_m := \{\bar{a} : a \in \mathbb{Z}\}$.

i) Zeigen Sie : $\mathbb{Z}_4$ mit der Verknüpfung $\bar{a} + \bar{b} := \overline{a+b}$ ist eine Gruppe.

ii) Ist $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ mit $\bar{a} \cdot \bar{b} := \overline{a \cdot b}$ ein Körper? Begründen Sie Ihre Behauptung.

iii) Untersuchen Sie, ob $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ mit der Multiplikation auf $\mathbb{C}$ eine Gruppe ist. Skizzieren Sie die Gruppenoperation.
(Hinweis: Polardarstellung der komplexen Zahlen)

Lösung:

i) Die Menge $\mathbb{Z}_4$ besteht aus genau vier Elementen $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$. Mit der Verknüpfung $\bar{a} + \bar{b} := \overline{a+b}$ ist $\mathbb{Z}_4$ eine Gruppe. Assoziativität ist klar. Das neutrale Element ist $\bar{0}$. Die Inverse von $\bar{1}$ ist $\bar{3}$ und $\bar{2}$ ist invers zu sich selbst.

ii) $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ mit $\bar{a} \cdot \bar{b} := \overline{a \cdot b}$ ist kein Körper. Denn $\bar{1}$ ist das neutrale Element bzgl. der Multiplikation. Aber $\bar{2} \cdot \bar{3} = \overline{2 \cdot 3} = \bar{6} = \bar{2} \neq \bar{1}$.↯

iii) Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit $|z_1| = |z_2| = 1$. Wir benutzen die Polardarstellung der komplexen Zahlen $z_1 = e^{i\vartheta_1}$ und $z_2 = e^{i\vartheta_2}$ mit $\vartheta_1, \vartheta_2 \in [0, 2\pi)$. So ist die Gruppenoperation das summieren der Winkeln.

Aufgabe 5 – Körper:

Zeigen Sie : $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2} :\ a, b \in \mathbb{Q}\}$ mit den Verknüpfungen

$$(a_1 + a_2\sqrt{2}) + (b_1 + b_2\sqrt{2}) := (a_1 + b_1) + (b_1 + b_2)\sqrt{2}; \qquad (*)$$
$$(a_1 + a_2\sqrt{2}) \cdot (b_1 + b_2\sqrt{2}) := (a_1b_1 + 2a_2b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{2}$$

ist ein Körper.
Lösung: Multiplikative Inverse.

$$\frac{1}{(a + b\sqrt{2})} = \frac{(a - b\sqrt{2})}{(a - b\sqrt{2})(a + b\sqrt{2})} = \frac{(a - b\sqrt{2})}{a^2 - 2b^2} = \frac{a}{a^2 - 2b^2} - \frac{b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2}$$

Aufgabe 6 – Vektorräume:

a) Sei X eine Menge und $\mathbb{K}^X := \{f : X \to \mathbb{K}\}$ die Menge aller Abbildungen von X nach $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
Zeigen Sie: $\mathbb{K}^X$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ bezüglich der Addition $(f + g)(x) := f(x) + g(x),\ \forall x \in X$ und der Skalarmultiplikation $(\lambda f)(x) := \lambda f(x),\ \forall x \in X,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$.

b) Bei welchen der folgenden Mengen (mit der gleichen Addition und Multiplikation wie in *a*)) handelt es sich um einen Vektorraum über $\mathbb{C}$.

i) $P(\mathbb{C}) := \{p : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : p \text{ ist ein Polynom}\}$ ii) $P^0(\mathbb{C}) := \{p \in P(\mathbb{C}) : p(0) = 0\}$ iii) $P^1(\mathbb{C}) := \{p \in P(\mathbb{C}) : p(0) = 1\}$ iv) $P_n(\mathbb{C}) := \{p \in P(\mathbb{C}) : \deg(p) \leq n\}$, $(n \in \mathbb{N})$

c) Entscheiden Sie, ob es sich in den nachfolgenden Fällen um Vektorräume handelt.

i) $c := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_i \in \mathbb{R}, \lim_{n\to\infty} a_n < \infty\}$ mit gliedweiser Addition

ii) $c_1 := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_i \in \mathbb{R}, \lim_{n\to\infty} a_n = 1\}$ mit gliedweiser Addition

Lösung:

a) .

b) $P(\mathbb{C})$, $P^0(\mathbb{C})$, $P_n(\mathbb{C})$ sind Vektorräume.
$P^1(\mathbb{C})$ ist kein Vektorraum. Denn für $g, f \in P^1(\mathbb{C})$ mit $g(0) = f(0) = 1$ gilt $(g + f)(0) = g(0) + f(0) = 2$, daraus folgt $g + f \notin P^1(\mathbb{C})$.

c) i) $c := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_i \in \mathbb{R}, \lim_{n\to\infty} a_n < \infty\}$ mit gliedweiser Addition ist ein Vektorraum. Aus der Analysis wissen wir, dass für zwei konvergente Folgen $(a_n), (b_n)$ ist die Folge (c_n) mit $c_n = \lambda a_n + \mu b_n$ konvergent.

ii) $c_1 := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_i \in \mathbb{R}, \lim_{n\to\infty} a_n = 1\}$ mit gliedweiser Addition ist kein Vektorraum.
Aus $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$ folgt $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 2$.↯

Hausaufgabe 4 – Operationen in Vektorräumen:

Skizzieren Sie folgende Menge. Entscheiden Sie, welche Menge einen Vektorraum darstellt.

1) [Lineare Hülle] $\{\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

2) [Affine Hülle] $\{\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R}\}$.

3) [Konvexe Hülle] $\{\lambda \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\alpha \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in [0,1], \alpha \in [0, 2\pi]\}$.

Lösung:

1) [Lineare Hülle] Die Menge $\{\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ ist die Ebene $\mathbb{R}^2$.

2) [Affine Hülle] Die Menge $\{\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R}\}$ ist eine Gerade in $\mathbb{R}^2$, die durch $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ geht. Diese Gerade geht nicht durch den Ursprung, somit ist sie kein Vektorraum.

3) [Konvexe Hülle] Die Menge $\{\lambda \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\alpha \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in [0,1], \alpha \in [0, 2\pi]\}$ ist die abgeschlossene Einheitskreisscheibe. Sie ist kein Vektorraum.

Hausaufgabe 5 – Untervektorraum:

Definition Es sei $(V, +, \cdot)$ ein K–Vektorraum. Eine Teilmenge $U \subset V$ heißt ein *Untervektorraum* von V, falls folgendes gilt:

1. $U \neq \emptyset$.
2. $v, w \in U \Rightarrow v + w \in U$.
3. $v \in U, \lambda \in K \Rightarrow \lambda v \in U$.

Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume der jeweiligen Vektorräume?

1. $\{(a,b)^t \in \mathbb{R}^2 \mid 3a + 5b + 2ab = 0\} \subset \mathbb{R}^2$
2. $\{(a,b,c)^t \in \mathbb{R}^3 \mid a + b \geq c\} \subset \mathbb{R}^3$
3. $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0$ für höchstens endlich viele $x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$
4. $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{Q}$ für alle $x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Lösung:

1. Kein Vektorraum.
   Der Vektor $(1, -\frac{3}{7})^t$ genügt der Gleichung $3a+5b+2ab = 0$. Aber $2 \cdot (1, -\frac{3}{7})^t$ genügt der Gleichung nicht.

2. Kein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$. Die Ungleichung bleibt ungültig unter der Multiplikaiton mit einem negativen λ.

3. $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0$ für höchstens endlich viele $x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ist ein Untervektorraum.

4. $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{Q}$ für alle $x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ist kein Untervektorraum. Weil aus $f(x) \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{2} \cdot f(x) \notin \mathbb{Q}$ folgt.

Hausaufgabe 6 – Symmetriegruppe:

i) Mit $\{d_0, d_{\frac{2\pi}{3}}, d_{\frac{4\pi}{3}}\}$ bezeichnen wir die Menge der Drehungen des gegebenen Dreiecks in der Ebene um jeweils 0, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$. Diese Drehungen bilden eine Gruppe.
Geben Sie die Verknüpfung, das neutrale Element und das Inverse von $d_{\frac{4\pi}{3}}$ bzgl. dieser Verknüpfung an.

ii) Überlegen Sie sich, dass die Drehungen aus a) und die Spiegelungen, die das Dreieck auf sich selbst abbilden, wieder eine Gruppe bilden.

iii) Geben Sie graphisch alle Möglichkeiten an, die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks mit den drei Buchstaben A, B, C zu versehen.

Lösung:

i) Die Verknüpfung ist die Hintereinanderführung.
Das neutrale Element ist die Drehung um 0.
Das Inverse von $d_{\frac{4\pi}{3}}$ ist $d_{\frac{2\pi}{3}}$.

ii) Überlegen Sie sich, dass die Drehungen aus a) und die Spiegelungen, die das Dreieck auf sich selbst abbilden, wieder eine Gruppe bilden.

iii) Die Möglichkeiten sind ${}_A\triangle^C_B$, ${}_A\triangle^B_C$, ${}_B\triangle^C_A$, ${}_B\triangle^A_C$, ${}_C\triangle^A_B$, ${}_C\triangle^B_A$.