Fachbereich Mathematik
Prof. R. Hemmecke
Yong He
23.10.2008

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

1. Übung zu Lineare Algebra f. Ph.

Aufgabe 1 – Quantoren:

Formulieren Sie mit Hilfe von Quantoren:
„Für jede reelle Zahl a und jede noch so kleine positive Zahl ϵ gilt: Es gibt eine rationale Zahl q, deren Abstand zu a kleiner als ϵ ist.“
Lösung:

$$\forall\, a \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\colon \exists q \in \mathbb{Q} \text{ mit } |a - q| < \varepsilon$$

Aufgabe 2 – Logisches Schließen:

Anna sagt: “Bettina lügt.”
Bettina sagt: “Claudia lügt.”
Claudia sagt: “Anna und Bettina lügen.”
Wer lügt denn nun?

Lösung: Angenommen, Anna lügt nicht. Dann gilt
$A \Rightarrow \neg B \Rightarrow C \Rightarrow \neg A \wedge \neg B$ ↯. Widerspruch zur Annahme.

Aufgabe 3 – Körper:

Wir bezeichnen die Menge der natürlichen Zahlen $0, 1, 2, \ldots$ mit $\mathbb{N}$ und die ganzen Zahlen $0, 1, -1, 2, -2, \ldots$ mit $\mathbb{Z}$. Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ist gegeben durch $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\}$. Die Menge der reellen Zahlen notieren wir mit $\mathbb{R}$.

i) Sind nachfolgende Gleichungen jeweils in $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ lösbar?

   a) $x - 1 = 0$
   b) $x + 1 = 0$
   c) $x^2 = 4$
   d) $x^2 = 2$
   e) $x^3 + 7x^2 - 3x - 21 = 0$

ii) Geben Sie eine Gleichung an, die nicht in $\mathbb{R}$ lösbar ist.

Lösung:

i) Sind nachfolgende Gleichungen jeweils in $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ lösbar?

   a) Lösbar in $\mathbb{N}$.
   b) Nicht lösbar in $\mathbb{N}$, lösbar in $\mathbb{Z}$.
   c) Lösbar in $\mathbb{Z}$.
   d) Nicht lösbar in $\mathbb{Z}$, lösbar in $\mathbb{R}$.
   e) Lösbar in $\mathbb{R}$.

ii) Z.B. die Gleichung $x^2 = -1$ ist nicht in $\mathbb{R}$ lösbar.

Hausaufgabe 1 – Quantoren:

Welche der folgenden Aussagen gelten in der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$? Welche gelten in der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$?

1. $\forall\, x\, \exists\, y : y < x$.
2. $\exists\, x\, \forall\, y : y < x$.
3. $\forall\, x\, \forall\, y : (x < y \ \vee\ x = y \ \vee\ y < x)$.
4. $\forall\, x\, \exists\, y : x^2 = y$.
5. $\forall\, x\, \forall\, y\, \exists z : y = x + z$.

Lösung:

1. Richtig nur in $\mathbb{R}$
2. Falsch.
3. Richtig in $\mathbb{R}$.
4. Richtig in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{N}$.
5. Richtig nur in $\mathbb{R}$.

Hausaufgabe 2 – Lineare Gleichungssysteme:

Gegeben seien

$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & +4x_2 & +6x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & +6x_2 & +9x_3 & = & 0 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{rrrcl} x_1 & & +2x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & +x_2 & +3x_3 & = & 5\ . \end{array}$$

i) Berechnen Sie die Lösungen der linearen Gleichungssysteme.

ii) Schreiben Sie die Gleichungssysteme in Matrixform um.

Lösung:

i) Die Lösungen L des ersten linearen Gleichungssystems bilden eine Gerade in $\mathbb{R}^3$

$$L = \{\lambda \in \mathbb{R} \colon \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

Die Lösung des zweiten linearen Gleichungssystems ist ein Punkt $\begin{pmatrix} -2 \\ \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\}$

ii) Die Matrizen sind jeweils

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Hausaufgabe 3 – Symmetriegruppe* (zum Knobeln):

Bestimmen Sie alle Symmetrien eines regelmäßigen Tetraeders mit Kantenlänge 1.

i) Überlegen Sie sich, warum die Anzahl der Symmetrie 24 betragen muss.

ii) Wieviele Drehachsen gibt es, die durch die Ecken und die Mitten der gegenüberliegenden Seitenflächen bestimmt sind?

iii) Wieviele Drehachsen gibt es, die durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Kanten bestimmt sind?

iv) Bestimmen Sie alle Spiegelungen an Ebenen, die jeweils zu einer Kante senkrecht sind und durch den Mittelpunkt dieser Kante gehen.

v) Das Tetraeder kann in einen Würfel mit Kantenlänge $\frac{\sqrt{2}}{2}$ einbeschrieben werden, skizzieren Sie dies. Bestimmen Sie 6 Drehspiegelungen, die das Tetraeder auf sich abbilden (Symmetrie).

Lösung:

i) Bezeichnen wir die Ecken des Tetraeders als E_1, E_2, E_3, E_4, so wirkt eine Symmetrie auf das Tetraeder, indem die Positionen der Ecken vertauscht werden. Kombinatorisch gibt es nur 24 Möglichkeiten, die Ecken zu vertauschen. Also ist die Symmetriegruppe des Tetraeders isomorph zu der symmetrischen Gruppe S_4.

ii) Das Tetraeder hat 4 dreizählige Drehachsen, die durch die Ecken und die Mittelpunkte der gegenüberliegenden Seitenflächen bestimmt sind.

iii) Das Tetraeder hat 3 zweizählige Drehachsen, die durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Kanten bestimmt sind.

iv) Das Tetraeder hat 6 Spiegelungsebenen, die jeweils zu einer Kante senkrecht sind und durch den Mittelpunkt dieser Kante gehen.

v) Platzieren Sie das Tetraeder in den Würfel mit Kantenlänge $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Spiegele an der Ebene, die durch die Mittelpunkte von vier parallen Kanten geht. Kombiniere diese Spiegelung mit einer $\frac{\pi}{2}$-Drehung um die Achse, die durch die Mittelpunkte des Würfels geht und orthogonal zu der Spiegelungsebene ist. Somit erhalten wir eine Drehspiegelung, die das Tetraeder auf sich abbildet. Es gibt 3 solche Ebenen (dementsprechend 3 Drehachsen), 2 Drehungen per Achse, zusammen sind es 6 Drehspiegelungen.