Fachbereich Mathematik
Prof. R. Hemmecke
Yong He
29.01.2009

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

7. Übung zu Lineare Algebra f. Ph.

Aufgabe 15 – Minitest:

In dieser Aufgabe seien V, W reelle Vektorräume über $\mathbb{R}$, wobei V die Dimension $n > 0$ und W die Dimension $m > 0$ hat.
Welche der folgenden Aussagen ist richtig? Begründen Sie Ihre Antwort.

1) Falls $m > n$ ist, gibt es eine lineare Abbildung $f\colon V \to W$.
2) Falls $m < n$ ist, so existiert eine lineare Abbildung $f\colon V \to W$.
3) Falls $m = n$ ist und die lineare Abbildung $f\colon V \to W$ hat $\ker(f) = \{0\}$, dann ist f surjektiv und bijektiv.
4) Falls $m \neq n$ ist, existiert es ein Isomorphismus zwischen V und W.
5) Die Dimensionsformel gilt nur für lineare Abbildungen zwischen endlich dimensionalen Vektorräumen.
6) Sei B_0 eine Basis von V und B_1 eine Basis von W. Dann gibt es zu jeder linearen Abbildung $f\colon V \to W$ eine eindeutig bestimmte $n \times m$ Matrix A bzgl. B_0 und B_1.

Lösung:

1) Richtig.
2) Richtig
3) Richtig.
4) Falsch.
5) Falsch. Beweis siehe Skript S. 29.
6) Richtig.

Aufgabe 16 – Lineare Abbildungen:

a) Geben Sie einen unendlich dimensionalen Vektorraum V an.
b) Geben Sie eine lineare Abbildung $f\colon V \to V$ an, die surjektiv aber nicht injektiv ist.
c) Geben Sie eine lineare Abbildung $f\colon V \to V$ an, die injektiv aber nicht surjektiv ist.

Lösung:

a) Sei $V := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}:}\ \lim_{n\to\infty} a_n < \infty\}$. Man kann zeigen,V ist ein unendlich dimensionaler Vektorraum.

b) Sei $U := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\colon \lim_{n\to\infty} a_n = 0\}$. Man kann zeigen, U ist ein unendlich dimensionaler Vektorraum von V. Die Abbildung $fV \to U$, $f((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = a_{n+1} - a_n$ ist linear und surjektiv (warum?) aber nicht injektiv (klar?).
Oder wir betrachten ein einfacheres Beispiel: $f\colon V \to \mathbb{R}$ mit $f((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \lim_{n\to\infty} a_n$. In diesem Fall ist f ist eine lineare Abbildung, die surjektiv ist aber nicht injektiv.

c) Sei $g\colon \mathbb{R} \to V$, $g(x) = (a(x)_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a(x)_n = x$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Die Abbildung g ist linear, injektiv, jedoch nicht surjektiv.

Aufgabe 17 – Lineare Abbildungen:

Gegeben sei ein Körper $\mathbb{R}$ und die Polynome $1, x, x^2, x^3, x^4\colon \ \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie: Die Menge $V := \mathrm{lin}\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit der Basis $B := \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$.

b) Schreiben Sie den Vektor $v = 5x^2 + 2x + 3 \in V$ als Koordinatenvektor bzgl. B.

c) Sei $f := \frac{d}{dx}$ die erste Ableitung nach x. Zeigen Sie: $f\colon V \to V$ ist eine lineare Abbildung.

d Geben Sie die Abbildung f in Matrixform bzgl. der Basis B an.

e) Ist f injektiv bzw. surjektiv?

Lösung:

a) Jedes Element $v \in V$ hat den Gestalt $v = \lambda \cdot 1 + \lambda_2 \cdot x + \lambda_3 \cdot x^2 + \lambda_3 \cdot x^3$ mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$.

b) Bzgl. B hat der Vektor $v = 5x^2 + 2x + 3 = 3 \cdot 1 + 2 \cdot x + 5 \cdot x^2$ die Koordinaten $(3, 2, 5, 0)^t$.

c) Seien $v, w \in V$ mit $v = a + bx + cx^2 + dx^3$ und $w = e + gx + hx^2 + lx^3$. Es gilt für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
f(\lambda v + \mu w) &= \frac{d}{dx}(\lambda a + \lambda bx + \lambda cx^2 + \lambda dx^3 + \mu e + \mu gx + \mu hx^2 + \mu lx^3) \\
&= (\lambda b + \lambda cx + \lambda dx^2 + \mu g + 2\mu hx + 3\mu lx^2) \\
&= \lambda \frac{d}{dx} v + \mu \frac{d}{dx} w
\end{aligned}$$

d Eine direkte Rechnung: $f(1) = 0$, $f(x) = 1$, $f(x^2) = 2x$, $f(x^3) = 3x^2$. Somit nimmt die Matrixform von f folgende Gestalt an

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e) Der Rang von f ist 3. Nach Dimensionsformel ist die Abbildung f weder injektiv noch surjektiv.

Hausaufgabe 15 – Lineare Abbildungen:

Sei $(v_1, .., v_n)$ eine Basis eines Vektorraums V und $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:

a) $\mathrm{Lin}(f(v_1), ..., f(v_n)) = \mathrm{Im}\, f$.

b) f ist surjektiv $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Rang}\, f = \dim W$.

c) f ist injektiv $\Longleftrightarrow$ $(f(v_1), ..., f(v_n))$ sind linear unabhängig.

Hausaufgabe 16 – Rechnen mit Matrizen:

Bestimmen Sie den Kern und das Bild der linearen Abbildung, die durch folgende Matrix beschrieben wird.

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 & 3 \\ -3 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Hausaufgabe 17 – Transponierte und Rang einer Matrix:

Seien $A \in \mathbb{R}^{l \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, wobei $l, m, n \in \mathbb{N}$.
Zeigen Sie:

a) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.

b) Der Zeilenrang von A ist gleich dem Rang von A.