Fachbereich Mathematik
Prof. R. Hemmecke
Yong He
15.01.2009

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

6. Übung zu Lineare Algebra f. Ph.

Aufgabe 1 *(10 Punkte)*

Seien V ein n-dimensionaler Vektorraum und W ein m-dimensionaler Vektorraum über demselben Körper $\mathbb{K}$. Ferner sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung.

a) $\mathrm{Ker}(f) =$

b) $\mathrm{Im}(f) =$

c) Geben Sie die Dimensionsformel für f an.

d) Eine Menge $U \subset V$ ist ein Untervektorraum von V, falls ...

e) $\{u_1, ..., u_k\} \subset V$ mit $k \leq n$ sind linear abhängig genau dann wenn...

Lösung:

a) $\mathrm{Ker}(f) = \{x \in V \colon f(x) = 0\}$. *(2 Punkte)*

b) $\mathrm{Im}(f) = \{f(x) \colon x \in V\}$. *(2 Punkte)*

c) $\mathrm{Ker}(f)+ \mathrm{Im}(f) = \dim(V)$. *(2 Punkte)*

d) Eine Menge $U \subset V$ ist ein Untervektorraum von V, falls es gilt für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und alle $v, w \in U$
$$\lambda v + \mu w \in U. \qquad (2 Punkte)$$

e) $\{u_1, ..., u_k\} \subset V$ mit $k \leq n$ sind linear abhängig genau dann wenn das linear Gleichungssystem $\lambda_1 \cdot u_1 + ... + \lambda_k \cdot u_k = 0$ eine nichttriviale Lösung besitzt. *(2 Punkte)*

Aufgabe 2 *(10 Punkte)*

In dieser Aufgabe sei V der reelle Vektorraum $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.
Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Die minimale Punktanzahl dieser Aufgabe liegt bei 0.

a) Die Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind linear abhängig.
☐ Richtig. ☐ Falsch.

b) Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ausgestattet mit der üblichen Addition und Multiplikation, ist ein Körper.
☐ Richtig. ☐ Falsch.

c) Seien $v, w \in V$ zwei linear unabhängige Vektoren, dann ist die Menge $U := \{\lambda \cdot v + \mu \cdot w \colon \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ ein Untervektorraum von V.
☐ Richtig. ☐ Falsch.

d) Seien $v, w \in V$ zwei linear abhängige Vektoren, dann ist die Menge $U := \{\lambda \cdot v + \mu \cdot w \colon \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ ein Untervektorraum von V.
☐ Richtig. ☐ Falsch.

e) Es gibt einen nichttrivialen Vektorraum, in dem es nur endlich viele Vektoren gibt.
☐ Richtig. ☐ Falsch.

f) Seien U, W Untervektorräume von V. Dann sind $U \cap W$ und $U + W$ Vektorräume.
☐ Richtig. ☐ Falsch.

g) Jedes inhomogene lineare Gleichungssystem in V besitzt eine Lösung.
☐ Richtig. ☐ Falsch.

h) Die Anzahl der Pivotvariablen in der Zeilenstufenform (=Rang des LGS) ist die maximale Anzahl der linear unanhängigen Vektoren des Lösungsraums.
☐ Richtig. ☐ Falsch.

i) Jede linear unabhängige Familie in V läßt sich zu einer Basis fortsetzen.
☐ Richtig. ☐ Falsch.

j) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ mit $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ ist eine lineare Abbildung.
☐ Richtig. ☐ Falsch.

Lösung:

a) Falsch.

b) Richtig.

c) Richtig.

d) Richtig.

e) Richtig.

f) Richtig.

g) Falsch.

h) Falsch.

i) Richtig.

j) Falsch.

Aufgabe 3 *(5 Punkte)*

Seien $\mathbb{C}^2$ ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ und $c \in \mathbb{C}$ eine Konstante. Wir betrachten ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned} iz_1 + z_2 &= c \\ z_1 - z_2 &= 1 + i \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie alle Lösungen in $\mathbb{C}^2$ des linearen Gleichungssystems.

b) Gibt es ein $c \in \mathbb{C}$, so dass das LGS keine Lösung besitzt?

Lösung:

a) Aus der ersten Gleichung folgt $z_2 = c - iz_1$, in die zweite Gleichung einsetzen erhalten wir $z_1(1+i) = (1+i) + c \Rightarrow z_1 = 1 + \frac{c}{1+i}$. *(2 Punkte)*
Diese wieder in die erste Gleichung einsetzen ergibt $z_2 = c - i - \frac{ic}{1+i}$. *(1 Punkte)*

b) Aus a) folgt, dass die Lösbarkeit des LGSs nicht von c abhängt. Es gibt für jedes $c \in \mathbb{C}$ eine Lösung in $\mathbb{C}^2$. *(2 Punkte)*

Aufgabe 4 *(8 Punkte)*
Gegeben sei folgendes Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie eine Basis des Lösungsraums.

b) Was ist die Dimension des Lösungsraums?

Lösung:

a) Gleichungen umsortieren:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Zeile 3 und Zeile 2 mit Zeile 1 subtrahieren ergibt

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 0 - 2x_2 - 4x_3 - 6x_4 &= 0 \\ 0 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

(1 Punkte)

Nach einer weiteren Kürzung erhalten wir

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

(1 Punkte)

Setze z.B $x_3 = \lambda, x_4 = \mu$ so erhalten wir $x_2 = -2\lambda - 3\mu$ und $x_1 = \lambda + 2\mu$. *(2 Punkte)*

Die Lösung

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2 Punkte)

b) Die Anzahl der Pivotvariablen ist 2. *(1 Punkte)*
Die Dimension der Lösungsraum ist 2. *(1 Punkte)*

Aufgabe 5 *(10 Punkte)*

Erweitern Sie $\{u = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\}$ zu einer Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^3$. Mit welchem Satz kann man sicher davon ausgehen, dass eine Basiserweiterung stets möglich ist?

Lösung: Die Vektoren u, v sind linear unabhängig. *(1 Punkte)*
Es ist noch ein Vektor zu konstruieren, der zu u, v unabhängig ist. *(1 Punkte)*
Sei $w = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ der gesuchte Vektor. Es muss gelten, dass folgendes LGS nur die triviale Lösung 0 besitzt. *(1 Punkte)*

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_2 + a\lambda_3 &= 0\\ 0 + \lambda_2 + b\lambda_3 &= 0\\ \lambda_1 + 0 + c\lambda_3 &= 0\end{aligned}$$

(2 Punkte)

Durch Gauß-Jordan Verfahren erhalten wir folgende Stufenform

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_2 + a\lambda_3 &= 0\\ 0 + \lambda_2 + b\lambda_3 &= 0\\ (c - a + b)\lambda_3 &= 0\end{aligned}$$

(2 Punkte)

Da nur die triviale Lösung 0 erwünscht ist, muss es gelten: $c - a + b \neq 0$. Also z.B. $a = 0$, $b = 0$ und $c = 1$ erfüllt diese Bedingung. *(1 Punkte)*
Der Basisergängzungssatz garantiert uns, dass jedes linear unanhängige System sich zu einer Basis erweitern lässt. *(2 Punkte)*