Analysis I für M, LaG/M, Ph
14.Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann
David Bücher
Christian Brandenburg

Sommersemester 2010
14.07.2010

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Komplexe Zahlen)

(a) Die Menge der komplexen Zahlen bildet einen Körper. Wenn $x, y \in \mathbb{R}$ und $z = x + iy \neq 0$ ist, wie sieht das multiplikativ inverse Element z^{-1} zu z aus?

(b) Berechnen Sie jeweils den Real- und Imaginärteil, sowie die konjugiert komplexe Zahl und den Betrag der folgenden komplexen Zahlen.

$$\text{(i)}\quad (1+2i)^2 \qquad \text{(ii)}\quad \frac{1+i}{1-i} \qquad \text{(iii)}\quad (1+i)^{14072010}$$

(c) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^4 = 16$ und zeichnen Sie diese in die Gaußsche Zahlenebene ein.

Lösung:

(a) Es gilt

$$z \cdot \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{z\bar{z}}{|z|^2} = \frac{|z|^2}{|z|^2} = 1.$$

Also ist das multiplikativ inverse Element zu z durch

$$\frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}x - i\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}y$$

gegeben.

(b) (i) $(1+2i)^2 = 1^2 + (2i)^2 + 4i = 1 - 4 + 4i = -3 + 4i$.
Somit hat $(1+2i)^2$ Realteil -3, Imaginärteil 4, Betrag $\sqrt{3^2+4^2} = 5$ und die zu $(1+2i)^2$ konjugiert komplexe Zahl ist $-3-4i$.

(ii) $\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i}\frac{1+i}{1+i} = \frac{1-1+2i}{1^2+1^2} = i$.
Der Realteil ist also 0, der Imaginärteil 1, genauso wie der Betrag, die zu i konjugiert komplexe Zahl ist $-i$.

(iii) Es gilt $|1+i| = \sqrt{2}$ und $\arg(1+i) = \pi/4$. Wir erhalten die Polardarstellung $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$. Da 14072010 beim Teilen durch 8 den Rest 2 hinterlässt, gilt

$$(1+i)^{14072010} = \sqrt{2}^{14072010} \cdot \left(e^{i\pi/4}\right)^{14072010} = 2^{7036005}e^{14072010i\pi/4} = 2^{7036005}e^{i\pi/2} = 2^{7036005}i.$$

Somit ist der gesuchte Realteil 0, der Imaginärteil $2^{7036005}$, der Betrag ebenfalls $2^{7036005}$ und die zu $2^{7036005}i$ konjugiert komplexe Zahl ist $-2^{7036005}i$.

(c) 2, $2i$, -2 und $-2i$ sind sicher Lösungen der Gleichung. Zu zeigen ist noch, dass es die einzigen sind:
Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $z^4 = 16$. Dann ist $|z|^4 = 16$, also $|z| = 2$. Somit ist z von der Form $2e^{i\arg(z)}$ und es gilt $e^{4i\arg(z)} = 1$. Also ist $\cos(4\arg(z)) = \mathrm{Re}(e^{4i\arg(z)}) = 1$, daher muss $4\arg(z)$ ein ganzzahliges Vielfaches von 2π sein. Zugleich ist $\arg(z) \in (-\pi, \pi]$. Es folgt, dass $\arg(z) \in \{-\pi/2, 0, \pi/2, \pi\}$.

Aufgabe G2 (Kurvendiskussion)
Es sei $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x^x$. Bestimmen Sie die Nullstellen, die (lokalen) Extremstellen und deren Typ, das Verhalten von f für $x\to 0$ und $x\to\infty$ sowie das Bild von f.

Lösung: Es gelten

$$f(x)=x^x=E(x\cdot\ln(x)),\qquad f'(x)=(\ln(x)+1)\,x^x\quad\text{und}\quad f''(x)=\left((\ln(x)+1)^2+\frac{1}{x}\right)x^x.$$

Wegen $E(x\ln(x))\in E(\mathbb{R})=(0,\infty)$ für $x\in(0,\infty)$ hat f keine Nullstellen. Daher gilt $f'(x)=(\ln(x)+1)f(x)=0$ genau dann, wenn $\ln(x)+1=0$, also für $x={}^1\!/\mathrm{e}$. Da $f\in C^2((0,\infty))$ ist und $f''({}^1\!/\mathrm{e})=\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-1}}>0$ gilt, hat f in $x_0={}^1\!/\mathrm{e}$, $f(x_0)=\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-1}}$, ihr einziges (lokales) Extremum, und zwar ein Minimum. Nach Beispiel 24.3 (c) ist $\lim_{x\to 0}f(x)=1$. Wegen $\lim_{x\to\infty}\ln(x)=\infty$ ist $\lim_{x\to\infty}x\cdot\ln(x)=\infty$, und da $\lim_{x\to\infty}E(x)=\infty$ gilt, folgt $\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}E(x\cdot\ln(x))=\infty$. Da ln streng monoton wächst, tut das auch $\ln(x)+1$. Somit ist $\ln(x)+1$ negativ für $x<{}^1\!/\mathrm{e}$, positiv für $x>{}^1\!/\mathrm{e}$. Ebenso $f'(x)=(\ln(x)+1)\,x^x$. D.h. f fällt monoton auf $(0,{}^1\!/\mathrm{e})$ und wächst monoton auf $({}^1\!/\mathrm{e},\infty)$. Also ist $f(x)\geq f({}^1\!/\mathrm{e})=\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-1}}$ für alle $x\in(0,\infty)$. Somit ist das Bild von f gegeben durch $[\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-1}},\infty)$.

Aufgabe G3 (Komplexe Folgen und Reihen)

(a) Bestimmen Sie

$$\text{(i)}\quad\lim_{n\to\infty}\frac{n+1+\mathrm{e}^{in}}{in+2}\qquad\text{(ii)}\quad\arg\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+i}{2}\right)^n\right).$$

(b) Wie bei reellen Funktionen schreibt man $\lim_{z\to z_0}f(z)=a$ für eine Teilmenge $D\subseteq\mathbb{C}$ mit einem Häufungspunkt $z_0\in\mathbb{C}$, eine Funktion $f:D\to\mathbb{C}$ und $a\in\mathbb{C}$, falls für jede komplexe Folge (z_n) in D, die gegen z_0 konvergiert, die Folge $(f(z_n))$ gegen a konvergiert. Falls es kein solches $a\in\mathbb{C}$ gibt, sagt man, $\lim_{z\to z_0}f(z)$ existiert nicht.
Untersuchen Sie, ob $\lim_{z\to 0}f(z)$ für

$$f:\mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C},\qquad f(z)=\mathrm{e}^{-1/z^2}$$

existiert und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Lösung:

(a) (i) Gerne würde man – wie bei reellen Folgen dieses Typs – n ausklammern und die Grenzwertrechenregeln verwenden. Die gelten zwar entsprechend auch in $\mathbb{C}$, doch haben wir diese momentan nicht zur Verfügung. Folgendermaßen lässt sich die komplexe Folge jedoch auf den reellen Fall zurückführen:

$$\frac{n+1+\mathrm{e}^{in}}{in+2}=\frac{n+1+\mathrm{e}^{in}}{in+2}\,\frac{-in+2}{-in+2}=\frac{-in^2+(2-i-\mathrm{e}^{in})n+2\mathrm{e}^{in}}{n^2+4}.$$

Nun gelten für $n\to\infty$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{n+1+\mathrm{e}^{in}}{in+2}\right)=\frac{(2-\cos(n))n+2\cos(n)}{n^2+4}=\frac{(2-\cos(n))^1\!/n+2\cos(n)^1\!/n^2}{1+{}^4\!/n^2}\longrightarrow 0$$

und

$$\operatorname{Im}\left(\frac{n+1+\mathrm{e}^{in}}{in+2}\right)=\frac{-n^2-(1+\sin(n))n+2\sin(n)}{n^2+4}=\frac{-1-(1+\sin(n))^1\!/n+2\sin(n)^1\!/n^2}{1+{}^4\!/n^2}\longrightarrow -1.$$

Nach Satz 29.9 (a) konvergiert $\left(\frac{n+1+\mathrm{e}^{in}}{in+2}\right)_{n=1}^{\infty}$ gegen $-i$.

(ii) Mit der Formel für die geometrische Reihe gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+i}{2}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{1+i}{2}}=\frac{2}{1-i}=1+i=\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\pi/4}.$$

Also ist $\arg\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+i}{2}\right)^n\right)=\arg(\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\pi/4})={}^\pi\!/4$.

(b) Wir betrachten die komplexe Folge (z_n) in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ mit $z_n=\frac{i}{n}$. Wegen $|z_n|=\frac{1}{n}$ gilt $\lim_{n\to\infty}z_n=0$. Nun ist $\lim_{n\to\infty}e^{-1/z_n^2}=\lim_{n\to\infty}e^{n^2}=\infty$, d.h. $\lim_{z\to 0}\mathrm{e}^{-1/z^2}$ existiert nicht.
Bemerkung: Wir betrachten als eine weitere komplexe Folge (w_n) mit $w_n=\frac{1}{n}$. Wieder ist $|w_n|=\frac{1}{n}$, daher $\lim_{n\to\infty}w_n=0$. Nun ist aber $\lim_{n\to\infty}e^{-1/w_n^2}=\lim_{n\to\infty}e^{-n^2}=0$. Insofern ist e^{-1/z^2} für $z\to 0$ nicht einmal „bestimmt divergent".