Analysis I für M, LaG/M, Ph
14.Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann
David Bücher
Christian Brandenburg

Sommersemester 2010
14.07.2010

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Komplexe Zahlen)

(a) Die Menge der komplexen Zahlen bildet einen Körper. Wenn $x, y \in \mathbb{R}$ und $z = x + iy \neq 0$ ist, wie sieht das multiplikativ inverse Element z^{-1} zu z aus?

(b) Berechnen Sie jeweils den Real- und Imaginärteil, sowie die konjugiert komplexe Zahl und den Betrag der folgenden komplexen Zahlen.

$$\text{(i)} \quad (1+2i)^2 \qquad \text{(ii)} \quad \frac{1+i}{1-i} \qquad \text{(iii)} \quad (1+i)^{14072010}$$

(c) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^4 = 16$ und zeichnen Sie diese in die Gaußsche Zahlenebene ein.

Aufgabe G2 (Kurvendiskussion)

Es sei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^x$. Bestimmen Sie die Nullstellen, die (lokalen) Extremstellen und deren Typ, das Verhalten von f für $x \to 0$ und $x \to \infty$ sowie das Bild von f.

Aufgabe G3 (Komplexe Folgen und Reihen)

(a) Bestimmen Sie

$$\text{(i)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n+1+\mathrm{e}^{in}}{in+2} \qquad \text{(ii)} \quad \arg\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+i}{2}\right)^n\right).$$

(b) Wie bei reellen Funktionen schreibt man $\lim_{z\to z_0} f(z) = a$ für eine Teilmenge $D \subseteq \mathbb{C}$ mit einem Häufungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$, eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{C}$, falls für jede komplexe Folge (z_n) in D, die gegen z_0 konvergiert, die Folge $(f(z_n))$ gegen a konvergiert. Falls es kein solches $a \in \mathbb{C}$ gibt, sagt man, $\lim_{z\to z_0} f(z)$ existiert nicht.

Untersuchen Sie, ob $\lim_{z\to 0} f(z)$ für

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}, \qquad f(z) = \mathrm{e}^{-1/z^2}$$

existiert und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.