Analysis I für M, LaG/M, Ph
13.Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann
David Bücher
Christian Brandenburg

Sommersemester 2010
07.07.2010

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Additionstheoreme)

(a) Zeigen Sie mit den Additionstheoremen die folgenden Formeln:

$$\begin{array}{rrcl} (\forall x \in \mathbb{R}) & \sin(2x) & = & 2\sin x \cos x \\ (\forall x \in \mathbb{R}) & \cos(2x) & = & 2(\cos x)^2 - 1 \end{array}$$

(b) Berechnen Sie mit geschicktem Kombinieren der beiden Formeln „$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$" und „$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$" die Werte von $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ und $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Lösung:

(a) Das Additionstheorem des Sinus, besagt:

$$\sin(x+y) = \cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y)$$

Setzen wir nun $x = y$, so erhalten wir:

$$\sin(2x) = \sin(x+x) = \cos(x)\sin(x) + \sin(x)\cos(x) = 2\sin(x)\cos(x),$$

was zu zeigen war.
Das Additionstheorem des Cosinus, besagt:

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\cos(y)$$

Im Spezialfall $x = y$ erhalten wir:

$$\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos(x)\cos(x) - \sin(x)\cos(x) = (\cos(x))^2 - (\sin(x))^2$$

Nun gilt aber nach Satz 25.4 b), dass $(\sin(x))^2 = 1 - (\cos(x))^2$ und somit gilt:

$$\cos(2x) = (\cos(x))^2 - (\sin(x))^2 = (\cos(x))^2 - \left(1 - (\cos(x))^2\right) = 2(\cos(x))^2 - 1.$$

(b) Setzen wir in den beiden Gleichungen

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \qquad \text{und} \qquad (\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$$

für x den Wert $\frac{\pi}{4}$ ein, so erhalten wir:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} \qquad \text{und} \qquad (\sin\frac{\pi}{4})^2 + (\cos\frac{\pi}{4})^2 = 1$$

Die erste Gleichung ergibt: $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$. Eingesetzt in die zweite Gleichung ergibt dies:

$$2(\sin\frac{\pi}{4})^2 = 1$$

Also ist $\sin\frac{\pi}{4} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Da aber der Sinus auf dem Intervall $]0,\pi[$ positiv ist, muss $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ sein. Und da Cosinus und Sinus an dieser Stelle übereinstimmen, ergibt sich auch $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Aufgabe G2 (Taylorentwicklung)

(a) Bestimmen Sie die Taylorentwicklung von $f(x) = \frac{1}{1-x}$ in $x = 0$. Zeigen Sie, dass $f(x) = T_\infty(x, 0)$, wann immer die Reihe konvergiert.

(b) Bestimmen Sie die Taylorentwicklung von $g(x) = \ln(1 - x)$ in $x = 0$.

Lösung:

(a) Sei $f(x) = (1 - x)^{-1}$. Dann gilt $f'(x) = -(1 - x)^{-2} \cdot (-1) = (1 - x)^{-2}$, $f''(x) = -2(1 - x)^{-3} \cdot (-1)$, etc. Induktiv erhalten wir

$$f^{(n)}(x) = n!(1 - x)^{-n-1}.$$

Tatsächlich, denn für $n = 0, 1, 2$ ist die Aussage wahr, und dann impliziert $f^{(n)}(x) = n!(1-x)^{-n-1}$, dass $f^{(n+1)}(x) = n! \cdot (-n-1) \cdot (1 - x)^{-n-2} \cdot (-1) = (n + 1)!(1 - x)^{-(n+1)-1}$. Also gilt $T_\infty(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, d.h. die geometrische Reihe.

Für letztere wissen wir, dass $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ für alle $|x| < 1$, also $T_\infty(x, 0) = f(x)$ für alle $|x| < 1$.

(b) Sei $g(x) = \ln(1 - x)$. Dann gilt $g'(x) = \frac{1}{1-x} \cdot (-1) = -f(x)$. Daher gilt $g^{(n)}(0) = -f^{(n-1)}(0) = -(n - 1)!$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $g(0) = \ln(1) = 0$, erhalten wir

$$T_\infty(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-(n - 1)!}{n!} x^n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n.$$

Aufgabe G3

Bestimmen Sie den Wert $\sqrt{2} = \frac{7}{5}(1 - \frac{1}{50})^{-1/2}$ bis auf einen Fehler, der kleiner oder gleich 10^{-5} ist, durch ein geeignetes Taylor-Polynom.

Lösung: Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \frac{7}{5}(1 - x)^{-1/2}, \quad x \in [0, \frac{1}{50}]$$

und ihre Taylorpolynome $(T_n f)(x, 0)$ mit Entwicklungsstelle 0. Dann gilt $\sqrt{2} = f(1/50)$. Da

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{7}{5} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(1 - x)^{-3/2}(-1) = \frac{7}{10}(1 - x)^{-3/2} \\ f''(x) &= \frac{21}{20}(1 - x)^{-5/2} \\ f'''(x) &= \frac{105}{40}(1 - x)^{-7/2} \end{aligned}$$

gilt, haben wir $f(0) = \frac{7}{5}$, $f'(0) = \frac{7}{10}$ und $f''(0) = \frac{21}{20}$. Also gilt

$$(T_2 f)(x, 0) = \frac{21}{40}x^2 + \frac{7}{10}x + \frac{7}{5}.$$

Mit der Restgliedabschätzung von Lagrange erhalten wir

$$(R_2 f)(1/50, 0) = \frac{f'''(\xi)}{6}\left(\frac{1}{50}\right)^3$$

für ein $\xi \in (0, 1/50)$. Wir erhalten damit die Abschätzung

$$|\sqrt{2} - (T_2 f)(1/50, 0)| = |(R_2 f)(1/50, 0)| \le \left|\frac{105}{40 \cdot 6 \cdot 50^3}(1 - \xi)^{-7/2}\right|.$$

Nun ist die Funktion $x \mapsto (1 - x)^{-7/2}$ auf dem Intervall $(0, 1/50)$ positiv und monoton wachsend, denn ihre Ableitung ist $x \mapsto 7/2 \cdot (1 - x)^{-9/2}$ und diese Funktion ist auf dem betrachteten Intervall positiv. Also wird obige Abschätzung für $\xi = 1/50$ maximal und wir erhalten

$$\begin{aligned} |\sqrt{2} - (T_2 f)(1/50)| &\le \frac{7}{16 \cdot 50^3}\left(\frac{50}{49}\right)^{7/2} = \frac{50^{7/2}}{16 \cdot 50^3 \cdot 7^6} = \frac{\sqrt{50}}{16 \cdot 7^6} \le \frac{1}{2 \cdot 7^6} \\ &= \frac{1}{235.298} = \frac{5}{1.176.490} \le \frac{5}{1.000.000} = 5 \cdot 10^{-6} \le 10^{-5}. \end{aligned}$$

Also ist

$$(T_2 f)(1/50, 0) = \frac{21}{40} \cdot \frac{1}{50^2} + \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{50} + \frac{7}{5} = \frac{141.421}{100.000} = 1{,}41421$$

eine Näherung von $\sqrt{2}$ mit der geforderten Genauigkeit.