Analysis I für M, LaG/M, Ph
12.Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann
David Bücher
Christian Brandenburg

Sommersemester 2010
30.06.2010

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Was stimmt?)
Überlegen Sie kurz, welche der folgenden Aussagen richtig und welche falsch sind.

(a) Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine in jedem Punkt $x \in [a, b]$ differenzierbare Funktion. Dann

☐ ist f stetig auf $[a, b]$
☐ ist f auf $[a, b]$ gleichmäßig stetig
☐ hat f auf $[a, b]$ ein globales Maximum
☐ ist f auf $[a, b]$ beschränkt
☐ hat f ein lokales Minimum $x_0 \in [a, b]$ und $f'(x_0) = 0$

(b) Es sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine in jedem Punkt $x \in (a, b)$ differenzierbare Funktion mit $f'(x) \le 0$ für alle $x \in (a, b)$. Dann

☐ ist f monoton wachsend
☐ ist f monoton fallend
☐ hat f kein lokales Maximum
☐ ist f streng monoton wachsend
☐ ist f streng monoton fallend

Lösung:

(a) Da jede differenzierbare Funktion stetig ist und jede stetige Funktion auf kompakten Mengen beschränkt und gleichmäßig stetig ist und ein Maximum annimmt:

☒ ist f stetig auf $[a, b]$
☒ ist f auf $[a, b]$ gleichmäßig stetig
☒ hat f auf $[a, b]$ ein globales Maximum
☒ ist f auf $[a, b]$ beschränkt
☐ hat f ein lokales Minimum $x_0 \in [a, b]$ und $f'(x_0) = 0$

Die Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, hat bei $x_0 = 0$ ein lokales Minimum, aber $f'(x_0) = 1$ ($x_0 = 0$ ist ja kein innerer Punkt von $[0, 1]$). Daher bleibt eines der Kästchen ungefüllt.

(b) Die Funktion $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$, erfüllt $f'(x) = 0 \le 0$, aber sie hat ein lokales Maximum.

☐ ist f monoton wachsend
☒ ist f monoton fallend
☐ hat f kein lokales Maximum
☐ ist f streng monoton wachsend
☐ ist f streng monoton fallend

Aufgabe G2 (Differenzierbarkeit)

(a) Zeigen Sie die Produktregel: Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und sind die Funktionen $f, g : I \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in I$ differenzierbar, dann ist auch fg in x_0 differenzierbar und es gilt

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

(b) Ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

auf $\mathbb{R}$ differenzierbar? Geben Sie gegebenenfalls die Ableitung an.

Lösung:

(a) Sei $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge in $I \setminus \{x_0\}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Es gilt

$$\frac{f(x_n)g(x_n) - f(x_0)g(x_0)}{x_n - x_0} = \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} g(x_n) + f(x_0)\frac{g(x_n) - g(x_0)}{x_n - x_0}.$$

Da f in x_0 differenzierbar ist, gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} = f'(x_0)$. Da g in x_0 differenzierbar ist, gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{g(x_n)-g(x_0)}{x_n-x_0} = g'(x_0)$. Weiter ist $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x_0)$, da g dann auch stetig in x_0 ist. Mit den Rechenregeln für Grenzwerte folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)g(x_n) - f(x_0)g(x_0)}{x_n - x_0} = f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0).$$

Da dies für jede solche Folge (x_n) gilt, ist

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

(b) Auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ berechnet man die Ableitung mit Ketten- und Produktregel:

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Für die Ableitung im Punkt $x = 0$ schaut man sich den Differenzenquotienten an:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Da gilt

$$\left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| = |x| \cdot \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \le |x|,$$

folgt

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Also ist f differenzierbar und die Ableitung lautet

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Bemerkung: f ist differenzierbar, aber die Ableitung f' ist nicht stetig (vgl. G3 vom 9. Übungsblatt).

Aufgabe G3 (Ableitungen berechnen)

(a) Berechnen Sie die Ableitungen der Funktionen

(i) $f(x) = x^{(x^x)}$ für $x > 0$, (i) $g(x) = \sqrt{1 + x^2}$ für $x \in \mathbb{R}$.

(b) Es gibt ein $r > 0$, so dass sich die Funktion $h : (-r, r) \to \mathbb{R}$, $h(x) = \ln\left(\cos^2(x) - \sin(x)\right)$, als Potenzreihe $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit Konvergenzradius r schreiben lässt (das brauchen Sie nicht zu zeigen). Bestimmen Sie a_0 und a_1.

Lösung:

(a) (i)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x^{(x^x)}\right)' = (E(x^x \cdot \ln(x)))' = (E(E(x\ln(x)) \cdot \ln(x)))' \\ &= (E(x\ln(x)) \cdot \ln(x))' E(E(x\ln(x)) \cdot \ln(x)) = \left(\left((\ln(x) + 1) \cdot \ln(x) + \frac{1}{x}\right) E(x\ln(x))\right) x^{(x^x)} \\ &= \left(\ln(x)^2 + \ln(x) + \frac{1}{x}\right) x^{x+x^x}. \end{aligned}$$

(ii) $g'(x) = \left(\sqrt{1+x^2}\right)' = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

(b) Es gilt $a_0 = h(0) = \ln(\cos^2(0) - \sin(0)) = \ln(1) = 0$. Die Ableitung von h ist $h'(x) = \frac{-2\cos(x)\sin(x) - \cos(x)}{\cos^2(x) - \sin(x)}$. Nach Satz 25.1 gilt $h'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, daher ist $a_1 = h'(0) = \frac{-2\cos(0)\sin(0) - \cos(0)}{\cos^2(0) - \sin(0)} = -1$.

Bemerkung: Dass h eine Darstellung als Potenzreihe hat, lässt sich später mit Hilfe der Funktionentheorie (Analysis III) leicht zeigen. Einen Beweis mit uns zur Verfügung stehenden Mitteln findet man in Walter, Analysis I, 7.13.

Hausübung

Aufgabe H1 (Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion)
Sei $D = (0, \infty)$ und die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = E(\sqrt{x}) + \sqrt{e}\ln(x)$, gegeben.

(a) Berechnen Sie die Ableitung von f.

(b) Untersuchen Sie, ob f eine differenzierbare Umkehrfunktion $f^{-1} : f(D) \to \mathbb{R}$ besitzt und bestimmen Sie gegebenenfalls $(f^{-1})'(e)$.

Lösung:

(a) $f'(x) = \frac{E(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{e}}{x}$.

(b) Wegen $f'(x) > 0$ für alle $x \in D$ ist f streng monoton wachsend (Satz 23.17). Nach Satz 23.9 existiert die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(D) \to \mathbb{R}$, ist in jedem Punkt $x \in f(D)$ differenzierbar ($f'(x) \neq 0$ für alle $x \in D$) und es gilt — falls $x = f(y)$ für $y \in D$ —

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)}.$$

Wegen $e = f(1)$ ist

$$(f^{-1})'(e) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{\frac{e}{2} + \sqrt{e}} = \frac{2}{e + 2\sqrt{e}}.$$

Aufgabe H2 (De l'Hospital)

(a) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte. (Ist der Satz von de l'Hospital anwendbar?)

$$\text{(i)} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{E(\sin(x)) - 1}{x}, \qquad \text{(ii)} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x)}{x}, \qquad \text{(iii)} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1 + E(x))}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x - \sin(x)$. Darf man, um den Grenzwert $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ zu berechnen, den Satz von de l'Hospital anwenden und folgern, dass

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \cos x}{1} = \text{„divergent“?}$$

Falls Nein: Warum nicht?

Lösung:

(a) (i) Es gelten $\lim_{x\to 0^+} E(\sin(x)) - 1 = E(\sin(0)) - 1 = 0$ (wegen der Stetigkeit von E und sin) und $\lim_{x\to 0^+} x = 0$. Mit $f(x) = E(\sin(x)) - 1$ und $g(x) = x$ existiert ferner $\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x)E(\sin(x))}{1} = 1$. Mit dem Satz von de l'Hospital folgt $\lim_{x\to 0^+} \frac{E(\sin(x))-1}{x} = 1$.

(ii) Sei (x_n) eine gegen 0 konvergente Folge mit $x_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $\cos(0) = 1$ und der Stetigkeit des Cosinus gibt es $\delta > 0$, so dass $\cos(x) > \frac{1}{2}$ für alle $x \in [0, \delta)$. Wegen $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ ist $x_n \in [0, \delta)$ für fast alle n. Somit gilt $\frac{\cos(x)}{x} \geq \frac{1}{2x_n}$ für fast alle n. Da $\left(\frac{1}{2x_n}\right)$ bestimmt gegen ∞ divergiert, tut das auch die Folge $\left(\frac{\cos(x_n)}{x_n}\right)$, also $\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x)}{x} = \infty$.
(Der Satz von de l'Hospital ist hier nicht anwendbar, da $\lim_{x\to 0^+} \cos(x) = 1 \neq 0$)

(iii) Seien $f, g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \ln(1 + E(x))$ und $g(x) = \sqrt{1 + x^2}$. Die „Einschränkung“ des Definitionsbereichs ändert am Grenzwert nichts, denn jede reelle Folge (x_n) mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ liegt mit fast allen Gliedern x_n in $(0, \infty)$. Sie führt aber dazu, dass die Voraussetzung $g'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \neq 0$ für alle $x \in (0, \infty)$ erfüllt ist. Es gelten (da $E(x) \longrightarrow \infty$ für $x \to \infty$)

$$f'(x) = \frac{E(x)}{1 + E(x)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{E(x)}} \longrightarrow 1 \text{ für } x \to \infty \quad \text{und} \quad g'(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \longrightarrow 1 \text{ für } x \to \infty.$$

Also gilt $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1$. Da $g(x) = \sqrt{1 + x^2} \geq x \longrightarrow \infty$ für $x \to \infty$, ist der Satz von de l'Hospital anwendbar und es folgt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1 + E(x))}{\sqrt{1 + x^2}} = 1.$$

(b) Der Bruch $\frac{f'(x)}{1} = \frac{1-\cos(x)}{1}$ konvergiert nicht in $\mathbb{R}$ und ist nicht bestimmt divergent. Somit ist die Voraussetzung

$$„\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \quad \text{für } L \in \mathbb{R} \text{ oder } L = \pm\infty \text{“}$$

nicht erfüllt und wir dürfen den Satz nicht anwenden.
Anmerkung: Tatsächlich hätte die Regel von de l'Hospital ein falsches Ergebnis geliefert, denn:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x - \sin x}{x} = 1 - \frac{\sin x}{x}$$

Der erste Summand ist konstant 1, der zwei Summand lässt sich betragsmäßig abschätzen durch:

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| = \frac{|\sin x|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|} \longrightarrow 0 \text{ für } x \longrightarrow \infty.$$

Das bedeutet:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

Aufgabe H3 (Schrankensatz)
Es sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $|f'(x)| \leq M$, $M > 0$, für alle $x \in (a, b)$. Zeigen Sie:

(a) Für alle $x, y \in (a, b)$ gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

(b) f ist Lipschitz-stetig.

Lösung:

(a) Seien $x, y \in (a, b)$ mit $x < y$ gegeben. Dann ist f stetig auf $[x, y]$ und differenzierbar in (x, y), also gibt es nach dem Mittelwertsatz der Differenzialrechnung ein $\xi \in (x, y)$, so dass $f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y)$. Es folgt mit der Voraussetzung

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| \cdot |x - y| \leq M|x - y|.$$

Falls $x = y$, ist nichts zu zeigen (da $0 \leq 0$ wahr ist). Falls $x > y$ ist, folgt mit dem gerade Gezeigten: $|f(x) - f(y)| = |f(y) - f(x)| \leq M|y - x| = M|x - y|$.

(b) Genau das wurde in Teil (a) gezeigt.