Analysis I für M, LaG/M, Ph
12.Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann
David Bücher
Christian Brandenburg

Sommersemester 2010
30.06.2010

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Was stimmt?)
Überlegen Sie kurz, welche der folgenden Aussagen richtig und welche falsch sind.

(a) Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine in jedem Punkt $x \in [a,b]$ differenzierbare Funktion. Dann

☐ ist f stetig auf $[a,b]$
☐ ist f auf $[a,b]$ beschränkt
☐ ist f auf $[a,b]$ gleichmäßig stetig
☐ hat f ein lokales Minimum $x_0 \in [a,b]$ und $f'(x_0) = 0$
☐ hat f auf $[a,b]$ ein globales Maximum

(b) Es sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine in jedem Punkt $x \in (a,b)$ differenzierbare Funktion mit $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (a,b)$. Dann

☐ ist f monoton wachsend
☐ ist f streng monoton wachsend
☐ ist f monoton fallend
☐ ist f streng monoton fallend
☐ hat f kein lokales Maximum

Aufgabe G2 (Differenzierbarkeit)

(a) Zeigen Sie die Produktregel: Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und sind die Funktionen $f, g : I \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in I$ differenzierbar, dann ist auch fg in x_0 differenzierbar und es gilt

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

(b) Ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

auf $\mathbb{R}$ differenzierbar? Geben Sie gegebenenfalls die Ableitung an.

Aufgabe G3 (Ableitungen berechnen)

(a) Berechnen Sie die Ableitungen der Funktionen

(i) $f(x) = x^{(x^x)}$ für $x > 0$, (i) $g(x) = \sqrt{1 + x^2}$ für $x \in \mathbb{R}$.

(b) Es gibt ein $r > 0$, so dass sich die Funktion $h : (-r, r) \to \mathbb{R}$, $h(x) = \ln\left(\cos^2(x) - \sin(x)\right)$, als Potenzreihe $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit Konvergenzradius r schreiben lässt (das brauchen Sie nicht zu zeigen). Bestimmen Sie a_0 und a_1.

Hausübung

Aufgabe H1 (Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion)
Sei $D = (0, \infty)$ und die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = E(\sqrt{x}) + \sqrt{e}\ln(x)$, gegeben.

(a) Berechnen Sie die Ableitung von f.

(b) Untersuchen Sie, ob f eine differenzierbare Umkehrfunktion $f^{-1} : f(D) \to \mathbb{R}$ besitzt und bestimmen Sie gegebenenfalls $(f^{-1})'(e)$.

Aufgabe H2 (De l'Hospital)

(a) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte. (Ist der Satz von de l'Hospital anwendbar?)

$$\text{(i)} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{E(\sin(x)) - 1}{x}, \qquad \text{(ii)} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x)}{x}, \qquad \text{(iii)} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+E(x))}{\sqrt{1+x^2}}.$$

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x - \sin(x)$. Darf man, um den Grenzwert $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ zu berechnen, den Satz von de l'Hospital anwenden und folgern, dass

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\cos x}{1} = \text{„divergent"?}$$

Falls Nein: Warum nicht?

Aufgabe H3 (Schrankensatz)
Es sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $|f'(x)| \le M$, $M > 0$, für alle $x \in (a, b)$. Zeigen Sie:

(a) Für alle $x, y \in (a, b)$ gilt

$$|f(x) - f(y)| \le M|x - y|.$$

(b) f ist Lipschitz-stetig.