Analysis I für M, LaG/M, Ph
11.Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann
David Bücher
Christian Brandenburg

Sommersemester 2010
23.06.2010

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Gleichmäßige Konvergenz)
Beweisen Sie Satz 21.8 im Skript:
Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und (f_n) eine Funktionenfolge auf D, sowie $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Gibt es eine Nullfolge (α_n) und ein $m \in \mathbb{N}$, so dass

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n \quad \text{für alle } n \geq m \text{ und alle } x \in D$$

gilt, so konvergiert (f_n) gleichmäßig auf D gegen f.

Lösung: Zu zeigen:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq m, \forall x \in D \quad \left|f_n(x) - f(x)\right| < \epsilon.$$

Sei $\epsilon > 0$. Da (α_n) eine Nullfolge ist, existiert ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $\alpha_n < \epsilon$ für alle $n > m$. Da nach Voraussetzung $|f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n$ für alle $x \in D$ und $n \geq m$, gilt in diesem Fall also

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n < \epsilon.$$

Aufgabe G2 (Gleichmäßige Stetigkeit)
Beweisen Sie die folgende Ausssage:
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Dann existieren $a, b \in \mathbb{R}$, so dass

$$|f(x)| \leq a|x| + b \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Lösung: Wähle $\delta > 0$, so dass $|f(x) - f(y)| < 1$ gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| \leq \delta$.
Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir zeigen

$$|f(x)| \leq \frac{1}{\delta}|x| + 1 + |f(0)|.$$

Es sei $m \in \mathbb{N}_0$ die größte nicht-negative ganze Zahl, so dass $m\delta \leq |x|$ gilt. Dann ist $0 \leq |x| - m\delta < \delta$. Mit

$$\zeta := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \geq 0, \\ -1 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

gilt $|x - \zeta m\delta| < \delta$. Nach „Teleskopieren" folgt mit der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| f(x) - f(\zeta m\delta) + \sum_{k=0}^{m-1} (f(\zeta(k+1)\delta) - f(\zeta k\delta)) + f(0) \right| \\ &\leq \underbrace{|f(x) - f(\zeta m\delta)|}_{\leq 1} + \sum_{k=0}^{m-1} \underbrace{|f(\zeta(k+1)\delta) - f(\zeta k\delta)|}_{\leq 1} + |f(0)| \\ &\leq m + 1 + |f(0)| \leq \frac{1}{\delta}|x| + 1 + |f(0)|. \end{aligned}$$

Setzen wir $a := \frac{1}{\delta}$ und $b := 1 + |f(0)|$, erhalten wir das Gewünschte.

Aufgabe G3 (Grenzwerte von Funktionen)
Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte

$$a)\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-x-1}{x+1} \qquad b)\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-x-1}{x-1} \qquad c)\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-x-1}{x^2-1}$$
$$d)\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} \qquad e)\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{|x|}$$

Lösung:

(a) Zunächst gilt $\lim_{x\to 1} x^3 = 1$, $\lim_{x\to 1} x^2 = 1$, $\lim_{x\to 1}(-x) = -1$ und $\lim_{x\to 1} x+1 = 2$. Somit folgt mit Satz 17.9 a) und d) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-x-1}{x+1} = 0$.

(b) Zunächst gilt $x^3+x^2-x-1 = (x-1)(x+1)^2$. Für $x \neq 1$ gilt also $\frac{x^3+x^2-x-1}{x-1} = (x+1)^2$. Mit Satz 17.9 a) folgt somit $\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-x-1}{x-1} = 4$.

(c) Die gleiche Faktorisierung des Zählers wie in b) liefert $\frac{x^3+x^2-x-1}{x^2-1} = \frac{(x-1)(x+1)^2}{(x-1)(x+1)} = x+1$. Satz 17.9 a) liefert also $\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-x-1}{x^2-1} = 2$.

(d) Wir erweitern den Bruch mit $(1+\sqrt{1-x^2})$ und erhalten

$$\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} = \frac{1-(1-x^2)}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})} = \frac{x^2}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})} = \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2})}.$$

Nun gilt $\lim_{x\to 0} 1-x^2 = 1$ und mit der Stetigkeit der Wurzelfunktion in $x = 1$ erhalten wir $\lim_{x\to 0}\sqrt{1-x^2} = 1$. Wiederum mit Satz 17.9 a) und d) ergibt sich also $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} = \frac{1}{2}$.

(e) Wir betrachten den linksseitigen und den rechtsseitigen Grenzwert getrennt: Sei $x > 0$. Dann gilt $\frac{x^2}{|x|} = \frac{x^2}{x} = x$ und somit $\lim_{x\to 0+}\frac{x^2}{|x|} = 0$. Sei $x < 0$. Dann gilt $\frac{x^2}{|x|} = -\frac{x^2}{x} = -x$ und somit $\lim_{x\to 0-}\frac{x^2}{|x|} = 0$. Da linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert übereinstimmen, gilt $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{|x|} = 0$.

Hausübung

Aufgabe H1 (Gleichmäßige Konvergenz)
Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und (f_n) eine Funktionenfolge auf D. Zeigen Sie:

(a) Ist (f_n) gleichmäßig konvergent, so konvergiert auch die Folge $(|f_n|)$ gleichmäßig auf D und zwar gegen $|f|$.

(b) Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert genau dann gleichmäßig gegen $f : D \to \mathbb{R}$, wenn

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|f_n(x) - f(x)| = 0$$

gilt. Ist die Funktion f beschränkt, so gilt in diesem Fall außerdem $\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|f_n(x)| = \sup_{x\in D}|f(x)|$.

Lösung:

(a) Sei (f_n) eine gleichmäßig konvergente Folge auf D mit Grenzfunktion f. Dann existiert nach Definition für jedes $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ und für alle $x \in D$ gilt $|f_n(x)-f(x)| < \epsilon$. Nach der Dreiecksungleichung gilt $\big||f_n(x)| - |f(x)|\big| \leq |f_n(x) - f(x)|$ und damit $\big||f_n(x)| - |f(x)|\big| < \epsilon$. Die Folge $(|f_n|)$ konvergiert also gleichmäßig gegen $|f|$.

(b) $(\Leftarrow)$ $\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|f_n(x) - f(x)| = 0$ bedeutet, dass für alle $\epsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt $\sup_{x\in D}|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. Nach Definition des Supremums muss dann aber auch $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ für alle $x \in D$ gelten. Die Funktionenfolge konvergiert also gleichmäßig.

$(\Rightarrow)$ Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Wir nehmen also an

$$\exists \epsilon > 0 \quad \forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq n_0 \quad \sup_{x\in D}|f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon.$$

Sei nun $\tilde{\epsilon} = \frac{\epsilon}{2}$. Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz von (f_n) auf D existiert dann ein $\tilde{n}_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $\tilde{n} \geq \tilde{n}_0$ und alle $x \in D$ gilt $|f_{\tilde{n}}(x) - f(x)| < \tilde{\epsilon}$. $\tilde{\epsilon}$ liefert also eine obere Schranke für $|f_{\tilde{n}}(x) - f(x)|$ auf ganz D und für alle $\tilde{n} \geq \tilde{n}_0$, insbesondere also auch für $n = \tilde{n}$, wenn wir $n_0 = \tilde{n}_0$ wählen. Damit muss aber $\sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \leq \tilde{\epsilon} < \epsilon$ gelten, ein Widerspruch zu der Annahme. Es gilt also $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = 0$ für gleichmäßig konvergente Funktionenfolgen.

Sei nun f beschränkt. Dann existiert zunächst einmal $\sup_{x\in D} |f(x)|$. Wir führen wieder einen Widerspruchsbeweis. Wir nehmen also an

$$\exists \epsilon > 0 \quad \forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq n_0 \left| \sup_{x\in D} |f_n(x)| - \sup_{x\in D} |f(x)| \right| \geq \epsilon.$$

Dann muss aber für alle n ein $x \in D$ existieren, so dass gilt $|f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon$, und somit $\sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon$ für alle n. Dies ist allerdings ein Widerspruch zu $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = 0$ und wir sind fertig.

Aufgabe H2 (Gleichmäßige Konvergenz)
Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen bzw. -reihen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

(a) $f_n = \sqrt[n]{n^2 x^3}, \quad x \in [0,5];$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^3 + x^3}, \quad x \in [0,1];$

(c) $g_n = \sin \frac{x}{n}, \quad x \in \mathbb{R}.$

Lösung:

(a) Für $x \in (0,5]$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 x^3} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n})^2 \cdot \sqrt[n]{x}^3 = (\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n})^2 \cdot (\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x})^3 = 1 \cdot 1 = 1$$

Für x=0 ist

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 \cdot x^3} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{0} = 0$$

Also ist (f_n) punktweise konvergent auf [0,5] mit der Grenzfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x = 0 \\ 1 & \quad x \in (0,5] \end{cases}.$$

Da f nicht stetig ist, aber f_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ stetig auf [0,5] ist, kann (f_n) auf [0,5] nicht gleichmäßig konvergieren.

(b) Für alle $x \in [0,1]$ gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{nx^2}{n^3 + x^3} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^3 + x^3} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, konvergiert die Funktionenreihe gleichmäßig auf [0,1] nach Satz 21.10. Damit konvergiert sie insbesondere auch punktweise.

(c) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0$ und da die Sinus-Funktion stetig ist, gilt
$\lim_{n\to\infty} \sin(\frac{x}{n}) = \sin(0) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Also konvergiert (g_n) punktweise gegen die Nullfunktion.
Die Konvergenz ist aber nicht gleichmäßig, denn:

$$\text{Setze } x_n = \frac{n\pi}{2}. \text{ Dann gilt } g_n(x_n) = \sin(\tfrac{\pi}{2}) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Also ist

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} [\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| g_n(x) - g(x) \right|] &= \lim_{n\to\infty} [\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| g_n(x) \right|] \\ &\geq \lim_{n\to\infty} 1 = 1 > 0 \end{aligned}$$

Damit kann (g_n) nach H1 b) nicht gleichmäßig konvergieren.

Aufgabe H3 (Gleichmäßige Stetigkeit)
Welche der folgenden Funktionen sind gleichmäßig stetig? Sind die Funktionen auch Lipschitz-stetig?

(a) $f_1 : [0, \infty) \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$

(b) $f_2 : (0, \infty) \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{x^2}$

Lösung:

(a) Beh.: f_1 ist gleichmäßig stetig.
Beweis: Wir zeigen, dass f_1 Lipschitz-stetig ist. Seien $x, y \in [0, \infty)$. Dann gilt

$$|f_1(x) - f_1(y)| = \left| \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+y^2} \right| = \left| \frac{1+y^2-1-x^2}{(1+x^2)(1+y^2)} \right|$$
$$= \frac{|y^2-x^2|}{(1+x^2)(1+y^2)} = |x-y| \frac{y+x}{(1+x^2)(1+y^2)}.$$

Nun gilt

$$\frac{y+x}{(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{1}{1+y^2} \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} \frac{y}{1+y^2} \leq 2,$$

denn für $x \leq 1$ gilt

$$\frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1,$$

und für $x \geq 1$

$$\frac{x}{1+x^2} \leq \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \leq 1.$$

Damit folgt also

$$|f_1(x) - f_1(y)| \leq 2|x-y|.$$

Damit ist f_1 Lipschitz-stetig und somit auch gleichmäßig stetig.

(b) Beh.: f_2 ist nicht gleichmäßig stetig.
Beweis: Annahme: f_2 ist gleichmäßig stetig. Dann existiert zu $\epsilon = 1$ ein δ, unabängig von x, so dass für alle $x, x \in (0, \infty)$ mit $|x - y| \leq \delta$ auch $|f_2(x) - f_2(y)| \leq 1$ gilt. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $|\delta/n - \delta/(2n)| = \delta/(2n) < \delta$. Also gilt für $x = \delta/n$ und $y = \delta/(2n)$, dass

$$|f_2(x) - f_2(y)| = \left| f_2\left(\frac{\delta}{n}\right) - f_2\left(\frac{\delta}{2n}\right) \right| = \left| \frac{n^2}{\delta^2} - \frac{4n^2}{\delta^2} \right| = \frac{3n^2}{\delta^2} < 1.$$

Da die natürlichen Zahlen nach oben unbeschränkt sind, ist dies jedoch ein Widerspruch. Damit kann also f_2 nicht gleichmäßig stetig sein.

Fussballspiel

Habt ihr Lust den Mitarbeitern zu zeigen, dass ihr auch auf dem Fussballfeld richtig was zu bieten habt?
Dann nutzt die Chance beim Spiel "Mitarbeiter vs. Studenten" am 08. Juli um 16:00 Uhr.
Weiter Infos und Anmeldelisten liegen im 2. Stock des S2|15 aus.