

Analysis I für M, LaG/M, Ph

11.Übungsblatt



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann
David Bücher
Christian Brandenburg

Sommersemester 2010
23.06.2010

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Gleichmäßige Konvergenz)

Beweisen Sie Satz 21.8 im Skript:

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und (f_n) eine Funktionenfolge auf D , sowie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Gibt es eine Nullfolge (α_n) und ein $m \in \mathbb{N}$, so dass

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n \quad \text{für alle } n \geq m \text{ und alle } x \in D$$

gilt, so konvergiert (f_n) gleichmäßig auf D gegen f .

Aufgabe G2 (Gleichmäßige Stetigkeit)

Beweisen Sie die folgende Aussage:

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Dann existieren $a, b \in \mathbb{R}$, so dass

$$|f(x)| \leq a|x| + b \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe G3 (Grenzwerte von Funktionen)

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x + 1}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x - 1}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^2 - 1}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{|x|}$$

Hausübung

Aufgabe H1 (Gleichmäßige Konvergenz)

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und (f_n) eine Funktionenfolge auf D . Zeigen Sie:

- Ist (f_n) gleichmäßig konvergent, so konvergiert auch die Folge $(|f_n|)$ gleichmäßig auf D und zwar gegen $|f|$.
- Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert genau dann gleichmäßig gegen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

gilt. Ist die Funktion f beschränkt, so gilt in diesem Fall außerdem $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} |f_n(x)| = \sup_{x \in D} |f(x)|$.

Aufgabe H2 (Gleichmäßige Konvergenz)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen bzw. -reihen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

$$(a) f_n = \sqrt[n]{n^2 x^3}, \quad x \in [0, 5];$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^3 + x^3}, \quad x \in [0, 1];$$

$$(c) g_n = \sin \frac{x}{n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe H3 (Gleichmäßige Stetigkeit)

Welche der folgenden Funktionen sind gleichmäßig stetig? Sind die Funktionen auch Lipschitz-stetig?

(a) $f_1 : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$

(b) $f_2 : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{x^2}$

Fussballspiel

Habt ihr Lust den Mitarbeitern zu zeigen, dass ihr auch auf dem Fussballfeld richtig was zu bieten habt?

Dann nutzt die Chance beim Spiel "Mitarbeiter vs. Studenten" am 08. Juli um 16:00 Uhr.

Weiter Infos und Anmelde Listen liegen im 2. Stock des S2|15 aus.