Analysis I für M, LaG/M, Ph
10.Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann
David Bücher
Christian Brandenburg

Sommersemester 2010
16.06.2010

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Mengen und ihre topologischen Eigenschaften)
Welche der folgenden Mengen sind offen/abgeschlossen/kompakt/beschränkt?

	offen	abgeschlossen	kompakt	beschränkt
$(0,1)$				
$\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$				
$\{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$				
$\mathbb{R} \setminus \left(\{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}\right)$				
$\mathbb{N}$				
$\emptyset$				

Lösung:

	offen	abgeschlossen	kompakt	beschränkt
(a) $(0,1)$	ja	nein	nein	ja
(b) $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$	nein	nein	nein	ja
(c) $\{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$	nein	ja	ja	ja
(d) $\mathbb{R} \setminus \left(\{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}\right)$	ja	nein	nein	nein
(e) $\mathbb{N}$	nein	ja	nein	nein
(f) $\emptyset$	ja	ja	ja	ja

Erläuterungen: Abgeschlossen und beschränkt $\Longleftrightarrow$ kompakt (in $\mathbb{R}$, nach Heine-Borel), daher braucht man die Kompaktheit nicht separat zu untersuchen. Um zu zeigen, dass eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ nicht offen ist, genügt es zu zeigen, dass ihr Komplement $\mathbb{R} \setminus M$ nicht abgeschlossen ist. Dazu wiederum reicht es nach Satz 19.4 aus, eine konvergente reelle Folge (x_n) mit $x_n \notin M$, aber $\lim_{n\to\infty} x_n \in M$ zu finden.

(b) ist nicht offen, da $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ nicht abgeschlossen ist (z.B. $1+1/n \notin \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$, aber $\lim_{n\to\infty}(1+1/n) = 1 \in \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$); nicht abgeschlossen, da $\frac{1}{n} \in \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$, aber $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \notin \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

(c) ist mit demselben Argument wie oben nicht offen; ist abgeschlossen, da jede konvergente Folge in $\{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ entweder ab einem n_0 konstant bleibt oder gegen 0 konvergiert. In beiden Fällen liegt der Grenzwert wieder in $\{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

(d) ist offen, da Komplement einer abgeschlossenen Menge; ist nicht abgeschlossen, da das Komplement nicht offen ist.

(e) ist nicht offen, da $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ nicht abgeschlossen ist (z.B. $1-1/n \notin \setminus\mathbb{N}$, aber $\lim_{n\to\infty}(1-1/n) = 1 \in \mathbb{N}$); ist abgeschlossen, da jede in $\mathbb{R}$ konvergente Folge (x_n) mit $x_n \in \mathbb{N}$ ab einem $n_0 \in \mathbb{N}$ konstant ist (wähle z.B. „$\varepsilon = 1/2$“) und daher ihr Grenzwert in $\mathbb{N}$ liegt.

(f) ist offen und beschränkt, da jedes $x_0 \in \emptyset$ jede erwünschte Eigenschaft hat (ansonsten gäbe es ja ein $x_0 \in \emptyset$, das eine erwünschte Eigenschaft nicht hat), insbesondere gibt es für jedes $x_0 \in \emptyset$ ein $\varepsilon > 0$, so dass $U_\varepsilon(x_0) \subseteq \emptyset$ - daher ist $\emptyset$ offen - und für jedes $x_0 \in \emptyset$ ist $|x_0| < 1$ - also $\emptyset$ beschränkt; ist abgeschlossen, da $\emptyset = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$ und $\mathbb{R}$ offen ist.

Aufgabe G2 (Nullstellen von Polynomen)
Es sei $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $a_n \neq 0$, ein reelles Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) Ist n ungerade, so hat $p(x)$ mindestens eine Nullstelle.

(b) Ist n gerade und $a_n a_0 < 0$, so hat $p(x)$ mindestens zwei Nullstellen.

Lösung: Das Polynom p lässt sich als Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto p(x)$, auffassen. Als Summe von Produkten stetiger Funktionen ist p stetig (9. Übung, G2 b).

(a) Wir zeigen die Behauptung für $a_n > 0$ (der Fall $a_n < 0$ geht analog): Zunächst ist $\lim_{m\to\infty} m^n = \infty$ und, da n ungerade, $\lim_{m\to\infty}(-m)^n = -\lim_{m\to\infty} m^n = -\infty$. Wegen

$$\lim_{m\to\infty}\left(a_n + a_{n-1}\frac{1}{m} + \cdots + a_0\frac{1}{m^n}\right) = a_n > 0$$

und

$$\lim_{m\to\infty}\left(a_n + a_{n-1}\frac{1}{-m} + \cdots + a_0\frac{1}{(-m)^n}\right) = a_n > 0$$

ist

$$\lim_{m\to\infty} p(m) = \lim_{m\to\infty}\left(a_n m^n + \cdots + a_0\right) = \lim_{m\to\infty} m^n\left(a_n + a_{n-1}\frac{1}{m} + \cdots + a_0\frac{1}{m^n}\right) = \infty$$

und

$$\lim_{m\to\infty} p(-m) = \lim_{m\to\infty}\left(a_n(-m)^n + \cdots + a_0\right) = \lim_{m\to\infty}(-m)^n\left(a_n + a_{n-1}\frac{1}{-m} + \cdots + a_0\frac{1}{(-m)^n}\right) = -\infty,$$

denn für jede Schranke $C > 0$ gibt es m_0, so dass $a_n + a_{n-1}\frac{1}{m} + \cdots + a_0\frac{1}{m^n} > \frac{a_n}{2}$ und $n^m > \frac{2C}{a_n}$ für alle $m \geq m_0$ (entsprechend für $p(-m)$). Daraus folgt insbesondere, dass die Folge $\left(p(m)\right)_{m=1}^{\infty}$ für ein (sogar für fast alle) $m_2 \in \mathbb{N}$ die Zahl 0 überschreitet (d.h. $p(m_2) > 0$), und dass die Folge $\left(p(-m)\right)_{m=1}^{\infty}$ für ein $m_1 \in \mathbb{N}$ die Zahl 0 unterschreitet (d.h. $p(-m_1) < 0$). Nach dem Nullstellensatz von Bolzano hat p daher eine Nullstelle (im Intervall $(-m_1, m_2)$).

(b) Wir zeigen die Behauptung nur für $a_n > 0$ und $a_0 < 0$, der Fall $a_n < 0$ und $a_0 > 0$ geht analog. Wie oben ist

$$\lim_{m\to\infty} p(m) = \lim_{m\to\infty}\left(a_n m^n + \cdots + a_0\right) = \lim_{m\to\infty} m^n\left(a_n + a_{n-1}\frac{1}{m} + \cdots + a_0\frac{1}{m^n}\right) = \infty$$

und

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty} p(-m) &= \lim_{m\to\infty}\left(a_n(-m)^n + \cdots + a_0\right) = \lim_{m\to\infty}(-m)^n\left(a_n + a_{n-1}\frac{1}{-m} + \cdots + a_0\frac{1}{(-m)^n}\right)\\ &= \lim_{m\to\infty} m^n\left(a_n + a_{n-1}\frac{1}{-m} + \cdots + a_0\frac{1}{(-m)^n}\right) = \infty,\end{aligned}$$

d.h. es gibt $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ mit $p(-m_1) > 0$ und $p(m_2) > 0$. Nun ist $p(0) = a_0 < 0$. Der Nullstellensatz von Bolzano, angewandt auf die Intervalle $(-m_1, 0)$ und $(0, m_2)$, liefert mindestens zwei Nullstellen.

Aufgabe G3 (Gleichwarme Punkte auf dem Äquator)
Zwei Punkte auf einem Kreis nennt man antipodal, wenn der Kreismittelpunkt auf ihrer Verbindungslinie liegt. Zeigen Sie: Auf dem Äquator gibt es (zu jedem Zeitpunkt) zwei antipodale Punkte mit gleicher Temperatur. Nehmen Sie dabei an, dass die Temperatur stetig vom Ort abhängt.

Bemerkung: Zu diesem Satz gibt es eine Verallgemeinerung für beliebig dimensionale Kugeln (Satz von Borsuk-Ulam). Dieser sagt insbesondere aus, dass es zwei antipodale Punkte auf der Erdoberfläche gibt, an denen gleichzeitig Temperatur und Luftdruck übereinstimmen.

Lösung: Es sei $T : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ die (als stetig angenommene) Funktion, welche dem Längengrad (im Bogenmaß gerechnet; alternativ: $\tilde{T} : [0, 360] \to \mathbb{R}$) die Temperatur zuordnet. Beachten Sie, dass $T(0) = T(2\pi)$ ist. Wir wollen zeigen, dass die Abbildung $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = T(x) - T(x+\pi)$ eine Nullstelle hat, denn dann ist die Temperatur in x gleich der im gegenüberliegenden Punkt $x + \pi$.
Wenn nicht schon 0 eine Nullstelle ist, dann ist $f(0) = T(0) - T(\pi) = T(2\pi) - T(\pi) = -f(\pi)$. $f(0)$ und $f(\pi)$ haben also unterschiedliche Vorzeichen. Nach dem Zwischenwertsatz (bzw. dem Nullstellensatz von Bolzano) muss es also eine Nullstelle zwischen den Werten 0 und π geben.

Hausübung

Aufgabe H1 (Offene/abgeschlossene Mengen)
Sei I eine beliebige (Index-)Menge. Zeigen Sie:

(a) Sind $O_i \subseteq \mathbb{R}$ $(i \in I)$ offene Mengen, dann ist ihre Vereinigung $\bigcup_{i\in I} O_i$ ebenfalls offen.

(b) Sind $A_i \subseteq \mathbb{R}$ $(i \in I)$ abgeschlossen, dann ist ihr Schnitt $\bigcap_{i\in I} A_i$ ebenfalls abgeschlossen.

Lösung:

(a) Sei ein $x_0 \in \bigcup_{i\in I} O_i$ gegeben. Dann existiert ein $i_0 \in I$, so dass $x_0 \in O_{i_0}$. Da O_{i_0} offen ist, gibt es $\varepsilon > 0$ derart, dass $U_\varepsilon(x_0) \subseteq O_i$. Dann gilt auch $U_\varepsilon(x_0) \subseteq \bigcup_{i\in I} O_i$.
Da $x_0 \in \bigcup_{i\in I} O_i$ beliebig war, gibt es zu jedem $x_0 \in \bigcup_{i\in I} O_i$ ein $\varepsilon > 0$, so dass $U_\varepsilon(x_0) \subseteq \bigcup_{i\in I} O_i$. Nach Definition ist $\bigcup_{i\in I} O_i$ offen.

(b) Nach De Morgan für Vereinigungen/Schnitte beliebig vieler Mengen (H2 a vom 1. Übungsblatt) ist

$$\mathbb{R} \setminus \left(\bigcap_{i\in I} A_i \right) = \bigcup_{i\in I} (\mathbb{R} \setminus A_i) \,.$$

Die rechte Seite ist als Vereinigung offener Mengen nach Teil (a) offen, daher ist $\bigcap_{i\in I} A_i$ als Komplement der offenen Menge $\mathbb{R} \setminus \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$ abgeschlossen.
Alternativ: Sei $(x_n)_{n=1}^\infty$ eine in $\mathbb{R}$ konvergente Folge mit $x_n \in \bigcap_{i\in I} A_i$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir zeigen, dass der Grenzwert x von $(x_n)_{n=1}^\infty$ dann schon in $\bigcap_{i\in I} A_i$ liegt: Wegen $x_n \in \bigcap_{i\in I} A_i$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $x_n \in A_i$ für alle $i \in I$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Da jedes A_i abgeschlossen ist, gilt $x \in A_i$ für jedes $i \in I$ (Satz 19.4). Das bedeutet aber, dass x im Schnitt $\bigcap_{i\in I} A_i$ liegt.
Nun haben wir gezeigt, dass der Grenzwert jeder in $\mathbb{R}$ konvergenten Folge mit Folgengliedern in $\bigcap_{i\in I} A_i$ schon in $\bigcap_{i\in I} A_i$ liegt. Daraus folgt nach Satz 19.4 die Abgeschlossenheit von $\bigcap_{i\in I} A_i$.

Aufgabe H2 (Mengen und ihre topologischen Eigenschaften)
Bestimmen Sie den Rand, das Innere, den Abschluss, die Häufungspunkte, sowie den Abschluss des Inneren und das Innere des Abschlusses der folgenden Mengen.

$$\text{(a)}\quad \mathbb{R} \qquad \text{(b)}\quad \{2\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, 1\right] \qquad \text{(c)}\quad \mathbb{Q} \cap [2,3]$$

Hinweis: Zwischen zwei verschiedenen reellen Zahlen gibt es stets eine rationale Zahl und zwischen zwei verschiedenen rationalen Zahlen $p, q \in \mathbb{Q}$ liegt immer eine irrationale Zahl, z.B. $\frac{1}{\sqrt{2}}p + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)q$.

Lösung: Vorbemerkung: Ist $M \subseteq \mathbb{R}$ eine reelle Teilmenge und $O \subseteq M^c$ offen, dann gelten $\partial M \subseteq O^c$ und $M^\circ \subseteq O^c$. Denn zu jedem $x \in O$ gibt es $\varepsilon > 0$, so dass $U_\varepsilon(x) \subseteq O$ gilt. Dann ist insbesondere $U_\varepsilon(x) \cap M = \emptyset$, d.h. x kann weder Rand- noch innerer Punkt von M sein.
Ist $U \subseteq M$ offen, dann ist jedes $x \in U$ innerer Punkt von U, also auch von M. Daher gilt $U \subseteq M^\circ$.
Sei $R \subseteq \mathbb{R}$ eine Menge, von der wir gezeigt haben, dass $R \subseteq \partial M$ gilt. Da jeder Punkt $x \in \mathbb{R}$ nach Definition *entweder* innerer Punkt von M^c, innerer Punkt von M oder Randpunkt von M ist, folgt aus $\mathbb{R} = O \cup R \cup U$ schon $\partial M = R$ und $M^\circ = U$.

(a) $\mathbb{R}^\circ = \mathbb{R}$, denn ist $x \in \mathbb{R}$, dann gilt $U_1(x) \subseteq \mathbb{R}$. Jeder Punkt $x \in \mathbb{R}$ ist ein innerer Punkt.
$\partial\mathbb{R} = \emptyset$, denn ist $x \in \mathbb{R}$, dann gilt $U_1(x) \cap \mathbb{R}^c = U_1(x) \cap \emptyset = \emptyset$, d.h. $\mathbb{R}$ hat keine Randpunkte.
$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^\circ \cup \partial\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \emptyset = \mathbb{R}$.
Jedes $x \in \mathbb{R}$ ist Häufungspunkt von $\mathbb{R}$, denn $\mathbb{R} \cap U_\varepsilon(x) \setminus \{x\}$ ist für jedes $x \in \mathbb{R}$ nicht leer.
$\overline{\mathbb{R}^\circ} = \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$.
$\overline{\mathbb{R}}^\circ = \mathbb{R}^\circ = \mathbb{R}$.

(b) Wir zeigen zunächst $\bigcup_{n=1}^\infty \left[\frac{1}{n}, 1\right] = (0,1]$: Die Inklusion „$\subseteq$“ ist klar, denn jedes Intervall $[1/n, 1]$ liegt in $(0,1]$. Sei nun $x \in (0,1]$ gegeben. Dann gibt es nach dem Satz von Archimedes ein $n \in \mathbb{N}$ mit $1/n \leq x$ (sonst wäre $1/x$ eine obere Schranke von $\mathbb{N}$). Also gilt $x \in [1/n, 1] \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty \left[\frac{1}{n}, 1\right]$. Dies zeigt die Inklusion „$\supseteq$“.
$\partial\left((0,1] \cup \{2\}\right) = \{0,1,2\}$ und $\left((0,1] \cup \{2\}\right)^\circ = (0,1)$: Denn $O := (-\infty, 0) \cup (1,2) \cup (2,\infty)$ ist offen und $O \subseteq M^c$; $U := (0,1) \subseteq M$ ist offen; $R := \{0,1,2\}$ besteht aus Randpunkten von M; und $\mathbb{R} = O \cup R \cup U$.
$\overline{(0,1] \cup \{2\}} = \left((0,1] \cup \{2\}\right)^\circ \cup \partial\left((0,1] \cup \{2\}\right) = [0,1] \cup \{2\}$.

Jeder innere Punkt $x \in (0,1)$ ist ein Häufungspunkt. Weiter sind die Randpunkte $0, 1$ Häufungspunkte, nicht aber 2.

$\overline{((0,1] \cup \{2\})^{\circ}} = \overline{(0,1)} = [0,1]$.

$\overline{((0,1] \cup \{2\})}^{\circ} = ([0,1] \cup \{2\})^{\circ} = (0,1)$.

(c) $\partial\left(\mathbb{Q} \cap [2,3]\right) = [2,3]$: Denn zunächst ist $O := (-\infty, 2) \cup (3, \infty)$ eine offene Menge im Komplement von $\mathbb{Q} \cap [2,3]$. Daher ist $\partial\left(\mathbb{Q} \cap [2,3]\right) \subseteq ((-\infty,2) \cup (3,\infty))^c = [2,3]$. Seien umgekehrt $x \in [2,3]$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. O.B.d.A kann $\varepsilon < 2$ angenommen werden. Dann liegt wenigstens eines der Intervalle $[x-\varepsilon/2, x-\varepsilon/3]$ und $[x+\varepsilon/3, x+\varepsilon/2]$ in $[2,3]$. Laut Hinweis gibt es darin eine rationale Zahl r, die dann auch in $\mathbb{Q} \cap [2,3]$ liegt. Also gilt $U_\varepsilon(x) \cap (\mathbb{Q} \cap [2,3]) \neq \emptyset$. Sei $n \in \mathbb{N}$ so, dass auch $r + \frac{1}{n} \in U_\varepsilon(x)$ (gibt es, da $U_\varepsilon(x)$ offen ist). Laut Hinweis, liegt zwischen r und $r + \frac{1}{n}$ eine irrationale Zahl, was $U_\varepsilon(x) \cap (\mathbb{Q} \cap [2,3])^c \neq \emptyset$ zeigt. Wählt man $n \in \mathbb{N}$ so, dass $x \notin [r, r+1/n]$, dann zeigt das Argument zugleich, dass $[2,3]$ genau die Menge der Häufungspunkte ist.

$\left(\mathbb{Q} \cap [2,3]\right)^{\circ} = \emptyset$: Das folgt mit der Vorbemerkung schon aus $\mathbb{R} = O \cup \partial\left(\mathbb{Q} \cap [2,3]\right)$.

$\overline{\mathbb{Q} \cap [2,3]} = \left(\mathbb{Q} \cap [2,3]\right)^{\circ} \cup \partial\left(\mathbb{Q} \cap [2,3]\right) = [2,3]$.

$\overline{(\mathbb{Q} \cap [2,3])^{\circ}} = \overline{\emptyset} = \emptyset$.

$\overline{\mathbb{Q} \cap [2,3]}^{\circ} = [2,3]^{\circ} = (2,3)$.

Bemerkung: Dass es zwischen zwei verschiedenen reellen Zahlen stets eine rationale Zahl gibt, ist leicht durch Anwendung des Satzes von Archimedes und des Wohlordnungsprinzips zu zeigen, oder durch „Abschneiden" einer Dezimaldarstellung.

Aufgabe H3 (Ein Fixpunktsatz)
Es sei $f : [0,1] \to [0,1]$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass es ein $x_0 \in [0,1]$ gibt, so dass $f(x_0) = x_0$ gilt.
Bemerkung: Ein solches x_0 heißt *Fixpunkt* von f.

Lösung: Ist $f(0) = 0$ oder $f(1) = 1$, dann brauchen wir nicht weiter zu suchen. Angenommen also, dass $f(0) > 0$ und $f(1) < 1$ ist. Wir betrachten die Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, gegeben durch $g(x) = f(x) - x$. Als Summe stetiger Funktionen ist g stetig (Satz 18.3). Aus unserer Annahme folgt, dass $g(0) > 0$ und $g(1) < 0$ ist. Nach dem Nullstellensatz von Bolzano hat g eine Nullstelle $x_0 \in (0,1)$. Also ist $g(x_0) = f(x_0) - x_0 = 0$, d.h. $f(x_0) = x_0$.