Analysis I für M, LaG/M, Ph
10.Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann
David Bücher
Christian Brandenburg

Sommersemester 2010
16.06.2010

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Mengen und ihre topologischen Eigenschaften)
Welche der folgenden Mengen sind offen/abgeschlossen/kompakt/beschränkt?

	offen	abgeschlossen	kompakt	beschränkt
$(0,1)$				
$\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$				
$\{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$				
$\mathbb{R} \setminus \left(\{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}\right)$				
$\mathbb{N}$				
$\emptyset$				

Aufgabe G2 (Nullstellen von Polynomen)
Es sei $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $a_n \neq 0$, ein reelles Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) Ist n ungerade, so hat $p(x)$ mindestens eine Nullstelle.

(b) Ist n gerade und $a_n a_0 < 0$, so hat $p(x)$ mindestens zwei Nullstellen.

Aufgabe G3 (Gleichwarme Punkte auf dem Äquator)
Zwei Punkte auf einem Kreis nennt man antipodal, wenn der Kreismittelpunkt auf ihrer Verbindungslinie liegt. Zeigen Sie: Auf dem Äquator gibt es (zu jedem Zeitpunkt) zwei antipodale Punkte mit gleicher Temperatur. Nehmen Sie dabei an, dass die Temperatur stetig vom Ort abhängt.

Bemerkung: Zu diesem Satz gibt es eine Verallgemeinerung für beliebig dimensionale Kugeln (Satz von Borsuk-Ulam). Dieser sagt insbesondere aus, dass es zwei antipodale Punkte auf der Erdoberfläche gibt, an denen gleichzeitig Temperatur und Luftdruck übereinstimmen.

Hausübung

Aufgabe H1 (Offene/abgeschlossene Mengen)
Sei I eine beliebige (Index-)Menge. Zeigen Sie:

(a) Sind $O_i \subseteq \mathbb{R}$ $(i \in I)$ offene Mengen, dann ist ihre Vereinigung $\bigcup_{i \in I} O_i$ ebenfalls offen.

(b) Sind $A_i \subseteq \mathbb{R}$ $(i \in I)$ abgeschlossen, dann ist ihr Schnitt $\bigcap_{i \in I} A_i$ ebenfalls abgeschlossen.

Aufgabe H2 (Mengen und ihre topologischen Eigenschaften)
Bestimmen Sie den Rand, das Innere, den Abschluss, die Häufungspunkte, sowie den Abschluss des Inneren und das Innere des Abschlusses der folgenden Mengen.

$$\text{(a)} \quad \mathbb{R} \qquad \text{(b)} \quad \{2\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, 1\right] \qquad \text{(c)} \quad \mathbb{Q} \cap [2,3]$$

Hinweis: Zwischen zwei verschiedenen reellen Zahlen gibt es stets eine rationale Zahl und zwischen zwei verschiedenen rationalen Zahlen $p, q \in \mathbb{Q}$ liegt immer eine irrationale Zahl, z.B. $\frac{1}{\sqrt{2}}p + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)q$.

Aufgabe H3 (Ein Fixpunktsatz)
Es sei $f : [0,1] \to [0,1]$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass es ein $x_0 \in [0,1]$ gibt, so dass $f(x_0) = x_0$ gilt.
Bemerkung: Ein solches x_0 heißt *Fixpunkt* von f.