Analysis I für M, LaG/M, Ph
9.Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann
David Bücher
Christian Brandenburg

Sommersemester 2010
9.06.2010

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Minitest)
Sei $f : \mathbb{R} \supseteq D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$.
Aus welchen der folgenden Aussagen folgt die Stetigkeit von f in x_0?
(Sie sollten nicht länger als **10 Minuten** für den Minitest benötigen.)

- ☐ $(\exists\, \varepsilon > 0)\, (\forall\, \delta > 0)\, (\forall\, x \in D : |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
- ☐ Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)$.
- ☐ $(\forall\, \varepsilon > 0)\, (\exists\, \delta > 0)\, (\forall\, x \in D : |x - x_0| < \varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \delta$.
- ☐ $(\forall\, \varepsilon > 0)\, (\exists\, \delta > 0)\, (\forall\, x \in D : |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
- ☐ $(\forall\, \varepsilon > 0)\, (\exists\, \delta > 0)\, (\forall\, x, y \in D : |x - y| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
- ☐ Es gibt eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, so daß $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)$ ist.

Lösung:

- ☐ $(\exists\, \varepsilon > 0)\, (\forall\, \delta > 0)\, (\forall\, x \in D : |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
- ☒ Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)$.
- ☐ $(\forall\, \varepsilon > 0)\, (\exists\, \delta > 0)\, (\forall\, x \in D : |x - x_0| < \varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \delta$.
- ☒ $(\forall\, \varepsilon > 0)\, (\exists\, \delta > 0)\, (\forall\, x \in D : |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
- ☒ $(\forall\, \varepsilon > 0)\, (\exists\, \delta > 0)\, (\forall\, x, y \in D : |x - y| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
- ☐ Es gibt eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, so daß $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)$ ist.

Aufgabe G2 (Stetigkeit)

(a) Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, sowie $x_0 \in D$. Ist zusätzlich x_0 ein Häufungspunkt von D, so ist f in x_0 genau dann stetig, wenn $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt.

(b) Beweisen Sie Satz 18.3 im Skript:
Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f, g : D \to \mathbb{R}$ seien stetig in $x_0 \in D$. Dann sind die Funktionen $f + g$, fg und $|f|$ stetig in x_0. Ist $x_0 \in \tilde{D} := \{x \in D : g(x) \neq 0\}$, so ist die Funktion $f/g : \tilde{D} \to \mathbb{R}$ stetig in x_0.

Lösung:

(a) $\Rightarrow$: Sei f stetig in x_0 und sei (x_n) eine beliebige Folge, die gegen x_0 konvergiert. Nach Satz 18.2 gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.

$\Leftarrow$: Sei $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$, d.h. für jede gegen x_0 konvergente Folge (x_n) mit $x_n \neq x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergiert die Folge $f(x_n)$ gegen $f(x_0)$. Um die Stetigkeit von f mittels Satz 18.2 zu zeigen, benötigen wir allerdings für **jede** gegen x_0 konvergente Folge (y_n), dass die Folge $f(y_n)$ gegen $f(x_0)$ konvergiert, also insbesondere auch für Folgen, in denen $y_n = x_0$ für beliebige viele $n \in \mathbb{N}$.

Betrachten wir aber eine solche Folge (y_n), so können wir diese in zwei Teilfolgen zerlegen; eine Teilfolge enthält alle Folgenglieder $a_k \neq x_0$, die andere alle Folgenglieder $b_k = x_0$. Für beide Teilfolgen gilt $\lim_{k\to\infty} f(a_k) = f(x_0)$ bzw $\lim_{k\to\infty} f(b_k) = f(x_0)$; für die erste nach Voraussetzung, für die zweite trivialerweise. Da die Folge $f(y_n)$ keine weiteren Häufungspunkte besitzen kann, ist $f(x_0)$ der Grenzwert. Nach Satz 18.2 ist f also stetig.

(b) Seien f, g stetig in x_0. Nach Satz 18.2 gilt für jede in D gegen x_0 konvergente Folge (x_n), dass die Folgen $f(x_n)$ und $g(x_n)$ konvergieren mit $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ und $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x_0)$. Nach Satz 17.9 a) existieren dann auch die Limites von $f+g$, fg und $|f|$ für $x \to x_0$ und sind gegeben durch $f(x_0)+g(x_0)$, $f(x_0)g(x_0)$ und $|f(x_0)|$. Erneutes Anwenden von Satz 18.2 liefert nun die Stetigkeit der Funktionen $f+g$, fg und $|f|$ in x_0.

Die Stetigkeit von f/g wird ganz analog gezeigt. Gegebenenfalls müssen wir allerdings die gegen x_0 konvergenten Folgen (x_n) so abändern, dass $x_n \in \tilde{D}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies ist aber kein Problem, da höchstens endlich viele Folgenglieder davon betroffen sind.

Aufgabe G3 (Grenzwerte und Stetigkeit)
Es seien zwei Funktionen $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$

$$g(x) := \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

(a) Skizzieren Sie die Graphen von f und g.
(b) Bestimmen Sie die Grenzwerte $\lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$ und $\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x}$, falls sie existieren.
(c) Sind f und/oder g jeweils stetig in 0?

Lösung:

(a) Siehe Abbildung 1 und Abbildung 2.

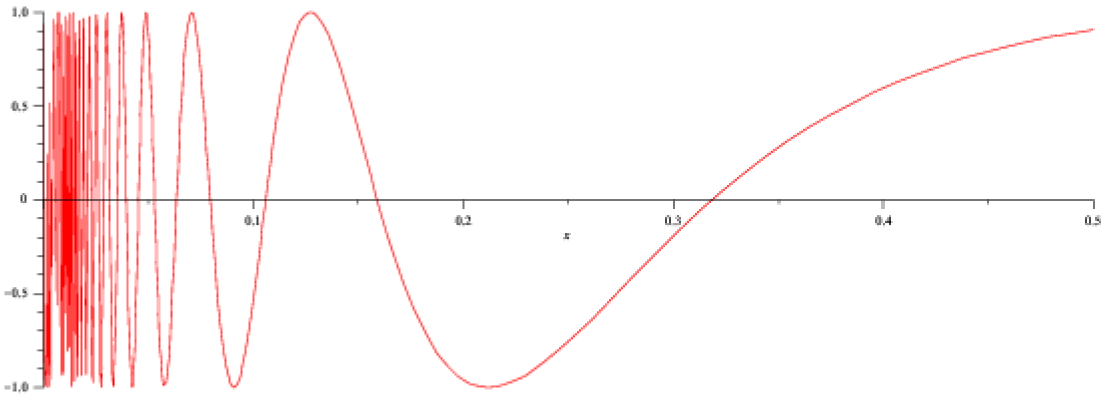

Abbildung 1: $\sin(\frac{1}{x})$

(b) Zur Untersuchung des ersten Grenzwertes betrachten wir die Folge $x_n := \frac{2}{n\pi}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0. Aber die Folge $\left(\sin \frac{1}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht, denn es gilt $\left|\sin \frac{1}{x_n}\right| = \left|\sin n\frac{\pi}{2}\right| = 1$ für ungerade n und $\left|\sin \frac{1}{x_n}\right| = \left|\sin n\frac{\pi}{2}\right| = 0$ für gerade n. Also existiert der Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$$

nicht.
Wir wenden uns dem Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x}$$

zu. Es ist $\left|\sin \frac{1}{x}\right| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$, also gilt

$$\left|x \sin \frac{1}{x}\right| \leq |x|$$

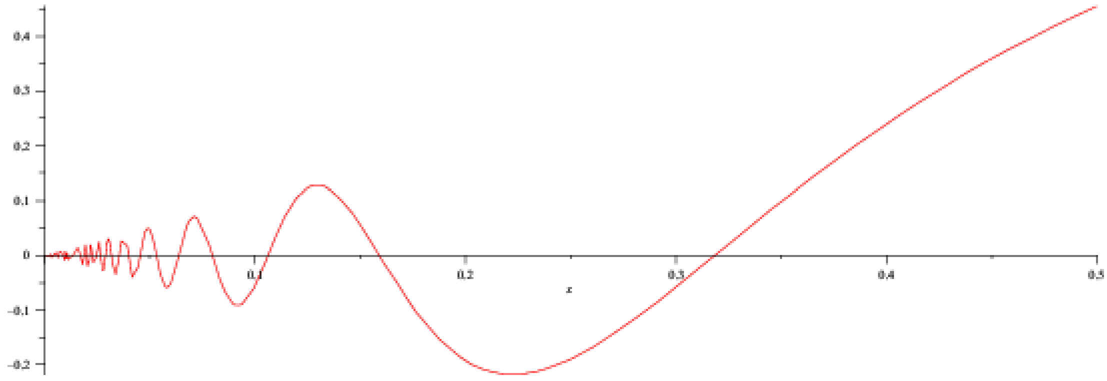

Abbildung 2: $x\sin(\frac{1}{x})$

für diese $x \in \mathbb{R}$. Damit haben wir

$$\lim_{x\to 0}\left|x\sin\frac{1}{x}\right| = 0,$$

und somit

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0.$$

(c) Die Funktion f ist nicht stetig in 0, denn wir haben in (b) ja eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im Definitionsbereich von f konstruiert, für die $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ und $f(x_n) = \sin\frac{1}{x_n} \not\to 0 = f(0)$ gilt.

Da nach (b)

$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$$

ist, wissen wir, dass für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im Definitionsbereich von g mit

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

auch

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = 0$$

gilt. Also ist g stetig in 0.

Hausübung

Aufgabe H1 (Grenzwerte)

(a) Beweisen Sie: Ist (x_n) eine bestimmt divergente Folge gegen plus oder minus unendlich, so gilt $x_n \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Weiter ist die Folge $(1/x_n)_{n\geq k}$ für ein geeignetes $k \in \mathbb{N}$ eine Nullfolge.

(b) Ist (y_n) eine Nullfolge mit $y_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $(1/y_n)$ im Allgemeinen nicht bestimmt divergent. Geben Sie hierzu ein Beispiel an.

(c) Beweisen Sie, dass für jede Nullfolge (y_n) mit $y_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ die Folge $(1/|y_n|)$ bestimmt gegen ∞ divergiert.

Lösung:

(a) Wir nehmen o.B.d.A. an, die Folge (x_n) divergiert bestimmt gegen ∞. Nach Definition gilt z.B. für $C = 1$, dass ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $x_n > 1$ für alle $n \geq n_0$. Es kann also höchstens endlich viele n geben mit $x_n = 0$, dementsprechend gilt $x_n \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

Betrachten wir nun die Folge $(1/x_n)_{n\geq k}$ mit $k \in \mathbb{N}$, so dass $x_n \neq 0$ für $n \geq k$. $(1/x_n)$ ist eine Nullfolge, falls für jedes $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|(1/x_n)| < \epsilon$ für alle $n > n_0$. Dies folgt aber direkt aus der bestimmten Divergenz von (x_n), mit $\epsilon = \frac{1}{C}$.

(b) $y_n = (-1)^n\frac{1}{n}$

(c) Sei (y_n) eine Nullfolge mit $y_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach Satz 7.8 ist die Folge $|(y_n)|$ ebenfalls eine Nullfolge. Somit existiert für beliebiges $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|(y_n)| < \epsilon$ für alle $n > n_0$. Dies bedeutet aber, dass $(1/|y_n|) > C := \frac{1}{\epsilon}$ für alle $n > n_0$, die Folge $(1/|y_n|)$ divergiert also bestimmt gegen ∞.

Aufgabe H2 (Kriterium für Stetigkeit)
Finden Sie für die folgenden Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ für ein beliebiges $x_0 \in D$ und ein beliebiges $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß gilt

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon\,.$$

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$

(c) $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $f(x) = \frac{1}{x}$

(d) Kann oben δ unabhängig von x_0 gewählt werden?

Lösung:

(a)

$$|ax + b - (ax_0 + b)| = |a||x - x_0| < \epsilon$$

für $\delta := \frac{\epsilon}{|a|}$, da

$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |a||x - x_0| < |a|\delta = \epsilon.$$

(b) Mit Satz 5.2 c) gilt

$$|x - x_0|^3 = \left|x - x_0\right| \cdot \left|x_0^2 + xx_0 + x^2\right| \leq \left(3|x_0|^2 + 1\right)\left|x - x_0\right| < \epsilon$$

für x nahe genug bei x_0 und $\delta := \frac{\epsilon}{3|x_0|^2+1}$, da

$$\left(3|x_0|^2 + 1\right)\left|x - x_0\right| < \left(3|x_0|^2 + 1\right) \cdot \delta = \epsilon.$$

(c) Für $x, x_0 > 0$ und $x > \frac{1}{2}x_0$ gilt

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \left|\frac{x_0 - x}{xx_0}\right| \leq \frac{\left|x_0 - x\right|}{\frac{1}{2}x_0^2} < \epsilon$$

für $\delta := \frac{1}{2}x_0^2\epsilon$, denn

$$\frac{\left|x_0 - x\right|}{\frac{1}{2}x_0^2} < \frac{\delta}{\frac{1}{2}x_0^2} = \epsilon$$

(d) In a) ist δ unabhängig von x_0, in b) und c) hingegen nicht. Funktionen, für die δ unabhängig von x_0 ist heißen *gleichmäßig stetig*.

Aufgabe H3 (Stetigkeit)
In welchen Punkten ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 1, \\ \frac{1}{n} & \text{für } \frac{1}{n} \leq x < \frac{1}{n-1} \quad (n = 2, 3, 4, \ldots), \\ 0 & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$

stetig?

Lösung: Zunächst einmal ist die Funktion f an den Stellen x mit $x > 1$, $x < 0$ sowie $x \in (\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1})$, $n = 2, 3, 4\ldots$, stetig, da dort f konstant ist.
Ferner ist $x = 0$ eine Stetigkeitsstelle. Denn für $\varepsilon > 0$ setzen wir $\delta = \varepsilon$. Dann gilt für alle x mit der Eigenschaft $|x - 0| < \delta$:

$$|f(x) - f(0)| = |f(x) - 0| \leq |x| < \varepsilon.$$

An den Stellen $x = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, ist die Funktion unstetig. Denn sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge die gegen $\frac{1}{n}$ konvergiere, wobei $x_k < \frac{1}{n}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ sei, dann konvergiert die Bildfolge $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ gegen $\frac{1}{n+1} \neq \frac{1}{n} = f(\frac{1}{n})$.