Analysis I für M, LaG/M, Ph
8.Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann
David Bücher
Christian Brandenburg

Sommersemester 2010
02.06.2010

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Konvergenzkriterien/Konvergenzradien)

(a) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n+n}, \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}, \qquad \text{(iii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}, \qquad \text{(iv)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n.$$

(b) Bestimmen Sie die Konvergenzradien folgender Potenzreihen.

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n, \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n+1} \frac{x^{3n}}{n^2}, \qquad \text{(iii)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^p x^n, \quad p \in \mathbb{N}, \qquad \text{(iv)} \quad \sum_{n=3}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) x^n.$$

Untersuchen Sie bei (ii), (iii) und (iv) auch das Konvergenzverhalten auf dem Rand.

Lösung:

(a) (i) Die Reihe ist nach Majorantenkriterium konvergent: Denn

$$\left|\frac{2^n}{3^n+n}\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

und die geometrische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ konvergiert.

(ii) Die Reihe ist nach Wurzelkriterium konvergent:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n^2}{2^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2}.$$

Daher ist die Folge $\left(\sqrt[n]{\left|\frac{n^2}{2^n}\right|}\right)_{n=1}^{\infty}$ beschränkt und $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n^2}{2^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n^2}{2^n}\right|} < 1$. Nach Satz 13.4 konvergiert die Reihe.

Alternativ klappt es auch mit dem Quotientenkriterium (Satz 13.6):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \frac{2^n}{n^2} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{1}{2} < 1.$$

Daher ist die Folge $\left(\left|\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \frac{2^n}{n^2}\right|\right)_{n=1}^{\infty}$ beschränkt und $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \frac{2^n}{n^2}\right| < 1$.

(iii) Die Reihe ist nach Minorantenkriterium divergent: Denn

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \geq \frac{1}{n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergiert.

(iv) Die Reihe ist nach Wurzelkriterium konvergent: Denn

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1.$$

Daher ist die Folge $\left(\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n}\right)_{n=1}^{\infty}$ beschränkt und $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n} < 1$. Nach Satz 13.4 konvergiert die Reihe.

(b) (i) Wir verwenden das Quotientenkriterium und setzen hierzu $a_n := \frac{n!}{n^n} x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)!n^n|x|^{n+1}}{n!(n+1)^{n+1}|x|^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n |x| = \frac{|x|}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n},$$

also

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{|x|}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{|x|}{\mathrm{e}}.$$

Zunächst ist festzuhalten, dass die Folge $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_{n=1}^{\infty}$ beschränkt ist, da konvergent. Für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \mathrm{e}$ ist $\limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, daher konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$ in diesem Fall absolut nach dem Quotientenkriterium. Für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > \mathrm{e}$ ist $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ für fast alle n, da $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$. Somit divergiert die Reihe in diesem Fall. Demnach ist der Konvergenzradius der Potenzreihe gleich e.

(ii) Wir setzen $y := x^3$ und $a_n := 1/(7^n+1) \cdot 1/n^2$. Dann hat die zu untersuchende Potenzreihe die Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$, so dass wir den Satz von Hadamard anwenden können:

$$r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{7^n+1}\frac{1}{n^2}}},$$

falls die Folge $\left(\sqrt[n]{\frac{1}{7^n+1}\frac{1}{n^2}}\right)_{n=0}^{\infty}$ beschränkt, aber keine Nullfolge ist.

Nun gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}} \cdot \frac{1}{7} = \sqrt[n]{\frac{1}{2\cdot 7^n}\frac{1}{n^2}} \leq \sqrt[n]{\frac{1}{7^n+1}\frac{1}{n^2}} \leq \sqrt[n]{\frac{1}{7^n}} = \frac{1}{7}$$

und wegen $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/(2n^2)} = 1$ ist damit nach dem Sandwichtheorem

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{7^n+1}\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{7}.$$

Damit sind wir tatsächlich in Fall (c) von Satz 15.2, daher ist $r = 7$ für die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$. Diese konvergiert also für alle $y \in \mathbb{R}$ mit $|y| < 7$ absolut und divergiert für $|y| > 7$. Mit $y = x^3$ ist also die ursprüngliche Reihe absolut konvergent, wenn $|x| < \sqrt[3]{7}$ und divergent falls $|x| > \sqrt[3]{7}$ gilt. Somit ist der gesuchte Konvergenzradius $\sqrt[3]{7}$.

Alternativ zur Substitution kann man auch die ursprüngliche Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ mit

$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{7^k+1}\frac{1}{k^2}, & \text{falls } n = 3k \text{ für ein } k \in \mathbb{N}_0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

direkt mit Hadamard untersuchen, oder das Quotientenkriterium verwenden.

Wir untersuchen nun noch das Konvergenzverhalten der Reihe auf dem Rand des Konvergenzintervalls. Sei dazu $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| = \sqrt[3]{7}$ gegeben. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$|a_n x^{3n}| = \frac{1}{7^n+1}\frac{|x|^{3n}}{n^2} = \frac{7^n}{7^n+1}\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n^2},$$

also konvergiert die Reihe für $x = -\sqrt[3]{7}$ und $x = \sqrt[3]{7}$ nach dem Majorantenkriterium, da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert.

(iii) Es ist

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^p} = \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\right)^p = 1,$$

wir sind also in Fall (c) des Satzes von Hadamard. Daher erhalten wir für den Konvergenzradius

$$r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^p}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^p}} = 1.$$

Sei nun ein $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| = 1$ gegeben. Dann gilt $|n^p x^n| = n^p |x|^n = n^p$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge der Summanden ist in diesem Fall keine Nullfolge, die Reihe ist also für $x = -1$ und $x = 1$ divergent.

(iv) Es gilt für alle $n \geq 3$

$$1 = \sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{n \cdot \frac{1}{n}} \leq \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} \leq \sqrt[n]{n \cdot \frac{1}{1}} = \sqrt[n]{n}.$$

Da $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ ist, haben wir nach dem Sandwichsatz damit auch

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} = 1.$$

Somit sind wir im dritten Fall des Satzes von Hadamard, daher ist der Konvergenzradius

$$r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n} 1/k}} = 1.$$

Ist $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| = 1$ gegeben, so ist die summierte Folge wegen

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} x^n\right| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \cdot |x|^n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

divergent und damit sicher keine Nullfolge. Die Potenzreihe divergiert also für $x = -1$ und $x = 1$.

Aufgabe G2 (Cauchy-Produkt)
Zeigen Sie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

für alle $x \in (-1, 1)$, indem Sie die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$ als ein Cauchy-Produkt schreiben.

Lösung: Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$ ist das Cauchy-Produkt der „geometrischen Potenzreihe" $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ mit sich selbst. Denn dieses ist durch die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ mit $c_n = \sum_{k=0}^{n} 1 \cdot 1 = n+1$ gegeben und $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$. Nun hat $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ Konvergenzradius 1 und für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ den Wert $\frac{1}{1-x}$. Daher hat nach Satz 15.8 auch $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$ mindestens Konvergenzradius 1 und für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ den Wert

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)^2 = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Aufgabe G3 (Konvergenz von Reihen)
Welche der folgenden Aussagen implizieren die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$? Welche der Aussagen impliziert die Konvergenz? Welche sind sogar äquivalent zur Konvergenz?

(a) Die Folge $\left(n^2 a_n\right)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die Ungleichung $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$.

(c) $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall p \in \mathbb{N} \quad \left(\left|\sum_{n=n_0}^{n_0+p} a_n\right| < \varepsilon\right)$.

(d) Die Folge $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert.

(e) $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ ist eine Nullfolge.

(f) $\exists n_0 \in \mathbb{N} \exists \varepsilon > 0 \forall n \geq n_0 \quad \left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq 1 - \varepsilon\right)$.

(g) Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $1 > \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1 - \frac{1}{n}$ für alle $n > n_0$.

(h) Die Folge der Partialsummen $(s_m)_{m=1}^{\infty}$, wobei $s_m := \sum_{n=1}^{m} a_n$, ist beschränkt.

(i) Die Folge der Partialsummen $(s_m)_{m=1}^{\infty}$, wobei $s_m := \sum_{n=1}^{m} a_n$, ist beschränkt und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(j) Die Folge $(b_m)_{m=1}^{\infty}$, wobei $b_m := \sum_{n=1}^{m} n\sqrt{n} a_n$, ist beschränkt.

Lösung: Es bezeichne C die Aussage: „Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert“. Weiter sei AC die Aussage: „$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut“. Offensichtlich gilt $AC \Rightarrow C$, aber $C \not\Rightarrow AC$. Gilt also S impliziert AC, dann gilt auch $S \Rightarrow C$ und $C \not\Rightarrow S$.
(a) $\Rightarrow AC$. Beweis: Da die Folge $(n^2 a_n)$ konvergiert, folgt, dass diese beschränkt ist. Das heißt, es gibt ein $M \in \mathbb{R}$, so dass $|n^2 a_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies impliziert, dass $|a_n| \leq \frac{M}{n^2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also folgt AC aus dem Majorantenkriterium. Weiter gilt $C \not\Rightarrow$ (i) nach obiger Bemerkung.
(b) $\not\Rightarrow C$. Als Gegenbeispiel dient zum Beispiel die harmonische Reihe.
(c) $\Leftrightarrow C$. Diese Aussage ist äquivalent zur Aussage, dass die Partialsummen eine Cauchyfolge bilden: Die Richtung „$\Leftarrow$“ folgt sofort. Für den Beweis „(c)$\Rightarrow$ Die Partialsummen bilden eine Cauchyfolge“ wähle n_0, so dass $\left|\sum_{n=n_0}^{n_0+p} a_n\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $p \in \mathbb{N}$. Für $k, p \in \mathbb{N}$ mit $k \leq p$ erhalten wir

$$\sum_{n=n_0+k}^{n_0+p} a_n = \sum_{n=n_0}^{n_0+p} a_n - \sum_{n=n_0}^{n_0+k-1} a_n,$$

und somit

$$\left|\sum_{n=n_0+k}^{n_0+p} a_n\right| \leq \left|\sum_{n=n_0}^{n_0+p} a_n\right| + \left|\sum_{n=n_0}^{n_0+k-1} a_n\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Damit gilt natürlich (c) $\not\Rightarrow AC$.
(d) $\not\Rightarrow C$. Als Gegenbeispiel wählen wir $a_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
(e) $\Rightarrow AC$. Dies folgt unmittelbar aus dem Quotientenkriterium. Damit gilt auch $C \not\Rightarrow$ (e).
(f) $\Rightarrow AC$, Dies folgt wiederum aus dem Quotientenkriterium.
(g) $\not\Rightarrow C$. Als Gegenbeispiel wählen wir $a_n = 1/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
(h) $\not\Rightarrow C$. Als Gegenbeispiel wählen wir $a_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
(i) $\not\Rightarrow C$. Wir betrachten die Folge (a_n) definiert durch

$$1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \ldots$$

Offensichtlich gilt $\lim a_n = 0$. Für die Partialsummen $s_m := \sum_{n=1}^{m} a_n$ gilt $s_m \in [0,1]$ für alle $m \in \mathbb{N}$, also ist $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Da $s_m = 1$ für unendlich viele $m \in \mathbb{N}$ und $s_m = 0$ für unendlich viele $m \in \mathbb{N}$, ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.
(j) $\Rightarrow AC$. Da nach Voraussetzung (b_m) beschränkt ist, gibt es $C > 0$, so dass $|b_m| < C$ für alle m. Dann folgt $|n\sqrt{n} a_n| = |b_n - b_{n-1}| < 2C$ für $n \geq 2$, also $|a_n| < \frac{2C}{n\sqrt{n}}$. Nun ist die Folge $\left(2C/(n\sqrt{n})\right)_{n=1}^{\infty} = \left(2C/n^{3/2}\right)_{n=1}^{\infty}$ absolut konvergent (Satz 13.9), daher nach Majorantenkriterium auch $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Hausübung

Aufgabe H1 (Konvergenzkriterien/Konvergenzradien)

(a) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n^2+4n-1}, \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2+1}.$$

(b) Bestimmen Sie die Konvergenzradien folgender Potenzreihen.

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(5+(-1)^n)^{2n}}, \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n.$$

Untersuchen Sie bei (i) auch das Konvergenzverhalten auf dem Rand.

Lösung:

(a) (i) Die Reihe ist divergent nach Minorantenkriterium: Denn für $n \geq 1$ ist

$$\frac{2n+1}{3n^2+4n-1} \geq \frac{2n+1}{7n^2} \geq \frac{2n}{7n^2} = \frac{2}{7}\frac{1}{n}$$

und die Reihe $\frac{2}{7}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert.

(ii) Die Reihe ist konvergent nach dem Leibniz-Kriterium: Die Nullfolge $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, wobei $b_n := \frac{n}{n^2+1}$, ist monoton fallend, denn für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} n((n+1)^2+1) = n^3+2n^2+2n &\geq n^3+n^2+n = (n+1)(n^2+1) \\ \Rightarrow \quad \frac{n}{n^2+1} &\geq \frac{n+1}{(n+1)^2+1} \\ \Rightarrow \quad b_n &\geq b_{n+1}. \end{aligned}$$

Nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} b_n = \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2+1}$.

(b) (i) Mit der Substitution $y := x^3$ und der Definition $a_n := \frac{1}{(5+(-1)^n)^{2n}}$ erhalten wir die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{(5+(-1)^n)^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$. Nun ist

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \frac{1}{6^2}, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{1}{4^2}, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Also $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{4^2}$, d.h. nach Hadamard hat $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{(5+(-1)^n)^{2n}}$ den Konvergenzradius 4^2. Demnach konvergiert die ursprüngliche Potenzreihe für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x|^3 < 4^2$ und divergiert für x mit $|x|^3 > 4^2$, hat also Konvergenzradius $4^{2/3}$.

Ist x auf dem Rand des Konvergenzintervalls, also $|x| = 4^{2/3}$, dann gilt für alle ungeraden n

$$\left| \frac{x^{3n}}{(5+(-1)^n)^{2n}} \right| = \frac{4^{2n}}{4^{2n}} = 1,$$

die summierte Folge $\left(\frac{x^{3n}}{(5+(-1)^n)^{2n}}\right)_{n=0}^{\infty}$ ist daher keine Nullfolge. Die Potenzreihe konvergiert also auf den Randpunkten nicht.

(ii) Wir verwenden das Quotientenkriterium und setzen $a_n := \binom{2n}{n} x^n$. Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)!|x|^{n+1}}{((n+1)!)^2} \frac{(n!)^2}{(2n)!|x|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(2n+2)|x|}{(n+1)^2} = 4|x|,$$

also ist die Folge $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_{n=0}^{\infty}$ beschränkt und $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 4|x| < 1$, falls $|x| < \frac{1}{4}$. In diesem Fall ist die Potenzreihe nach Quotientenkriterium absolut konvergent. Falls $|x| > \frac{1}{4}$, dann ist $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, daher $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ für fast alle n, somit die Potenzreihe divergent. Also ist der Konvergenzradius $r = \frac{1}{4}$.

Aufgabe H2 (Gegenbeispiele)

(a) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

konvergiert, aber das Cauchy-Produkt der Reihe mit sich selbst nicht konvergiert.
Warum ist dies kein Widerspruch zu dem in der Vorlesung bewiesenen Satz über die Konvergenz des Cauchy-Produktes?

(b) Es sei

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ -\frac{1}{n^2}, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nicht konvergiert. Ist dies ein Widerspruch zum Leibniz-Kriterium?

Lösung:

(a) Die Folge $\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)_{n=0}^{\infty}$ fällt monoton und konvergiert gegen 0. Daher ist nach dem Leibniz-Kriterium die alternierende Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ konvergent.

Das Cauchy-Produkt der Reihe mit sich selbst ist durch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}}$ gegeben. Nun ist

$$|a_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}}\right| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \frac{1}{\sqrt{n-k+1}} \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq (n+1) \cdot \frac{1}{n+1} = 1,$$

also ist $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ keine Nullfolge. Daher konvergiert das Cauchy-Produkt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nicht.

Das ist kein Widerspruch zum Satz über die Konvergenz des Cauchy-Produkts, da die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ nicht absolut konvergiert.

(b) Es sei

$$b_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ 0, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

und

$$c_n = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ \frac{1}{n^2}, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Dann ist $a_n = b_n - c_n$. Es gilt $|c_n| \leq \frac{1}{n^2}$. Da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert (Beispiel 13.3 b), ist $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ nach dem Majorantenkriterium konvergent. Wäre nun $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, dann nach Satz 12.8 auch $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + c_n) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Nun ist die $2m$-te Partialsumme der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ gleich

$$\sum_{n=1}^{2m} b_n = 0 + \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{4} + 0 + \cdots + 0 + \frac{1}{2m} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n}.$$

Da aber die Partialsummen der harmonischen Reihe unbeschränkt sind, kann die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ nicht konvergieren. Also ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nicht konvergent.

Das ist kein Widerspruch zum Leibniz-Kriterium, da die Folge $(-1)^{n+1} a_n$ nicht *monoton* gegen Null konvergiert.

Aufgabe H3 (Potenzreihen)
Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$ (dabei ist auch $r = \infty$ zugelassen).

(a) Zeigen Sie: Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|x^n$ hat ebenfalls Konvergenzradius r.

(b) Ist $\varrho \in \mathbb{R}$ mit $0 < \varrho < r$, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|\varrho^{n-1}$.

(c) Ist das auch für die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} n^p|a_n|\varrho^{n-1}$, wobei $p \in \mathbb{N}$, bzw. für $\sum_{n=1}^{\infty} n^n|a_n|\varrho^{n-1}$ richtig?

Lösung: Da $r > 0$, ist die Folge $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)_{n=1}^{\infty}$ nach dem Satz von Hadamard beschränkt.

(a) Wegen $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ ist mit Aufgabe G1 (b) auf dem 5. Übungsblatt

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|}.$$

Nun ist die linke Seite Null genau dann, wenn die rechte Seite Null ist, und in diesem Fall haben beide Potenzreihen Konvergenzradius ∞. Sind beide Seiten von Null verschieden, dann gilt nach dem Satz von Hadamard für den Konvergenzradius r' von $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|x^n$:

$$r' = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = r.$$

(b) Da $|\varrho| < r = r'$ ist, befinden wir uns nach Teil (a) im Konvergenzintervall $(-r, r)$ der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|x^n$, also konvergiert nach Hadamard die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|\varrho^n$. Dann konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|\varrho^{n-1} = \frac{1}{\varrho}\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|\varrho^n$ (Satz 12.8).

(c) Dieses Mal wenden wir das Wurzelkriterium auf die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^p|a_n|\varrho^{n-1}$ an. Es ist (wieder mit Aufgabe G1 (b) auf dem 5. Übungsblatt)

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^p|a_n|\varrho^{n-1}} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^p}\sqrt[n]{|a_n|}\frac{\varrho}{\sqrt[n]{\varrho}} = \varrho \cdot \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

da $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^p} = \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\right)^p = 1$ und $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\varrho} = 1$. Nun gibt es die beiden Fälle

- $r < \infty$: Dann ist $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{r}$, also $\varrho \cdot \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{\varrho}{r} < 1$, daher konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} n^p|a_n|\varrho^{n-1}$ nach Wurzelkriterium.
- $r = \infty$: Nun ist $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, daher $\varrho \cdot \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ und $\sum_{n=1}^{\infty} n^p|a_n|\varrho^{n-1}$ konvergiert wieder nach Wurzelkriterium.

Für die zweite Reihe haben wir wieder die beiden Fälle

- $r < \infty$: Da $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{r} > 0$ ist, ist die Folge $n\sqrt[n]{|a_n|}$ unbeschränkt (man wähle z.B. eine gegen den Häufungspunkt $\frac{1}{r}$ konvergente Teilfolge von $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)_{n=1}^{\infty}$). Wegen $\varrho > 0$ gilt das dann auch für $\sqrt[n]{n^n|a_n|\varrho^{n-1}}$, denn
$$\sqrt[n]{n^n|a_n|\varrho^{n-1}} = n\sqrt[n]{|a_n|}\frac{\varrho}{\sqrt[n]{\varrho}} \geq 2\varrho \cdot n\sqrt[n]{|a_n|}$$
für fast alle n, weil $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\varrho} = 1$ und daher $\sqrt[n]{\varrho} < 2$ für fast alle n. Somit divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^n|a_n|\varrho^{n-1}$ nach dem Wurzelkriterium.
- $r = \infty$: Nun kann alles passieren, je nachdem welche der beiden Folgen $(n)_{n=1}^{\infty}$ und $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)_{n=1}^{\infty}$ schneller di- bzw. konvergiert. Ein Beispiel für die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^n|a_n|\varrho^{n-1}$ liefert etwa $a_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Für $a_n = n^{-n}$ und $\varrho > 1$ divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} n^n|a_n|\varrho^{n-1}$, denn dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} n^n|a_n|\varrho^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \varrho^n$ die altbekannte geometrische Reihe.