Analysis I für M, LaG/M, Ph
8.Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Dr. Robert Haller-Dintelmann
David Bücher
Christian Brandenburg

Sommersemester 2010
02.06.2010

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Konvergenzkriterien/Konvergenzradien)

(a) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n+n}, \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}, \qquad \text{(iii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}, \qquad \text{(iv)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n.$$

(b) Bestimmen Sie die Konvergenzradien folgender Potenzreihen.

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n, \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n+1} \frac{x^{3n}}{n^2}, \qquad \text{(iii)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^p x^n, \quad p \in \mathbb{N}, \qquad \text{(iv)} \quad \sum_{n=3}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) x^n.$$

Untersuchen Sie bei (ii), (iii) und (iv) auch das Konvergenzverhalten auf dem Rand.

Aufgabe G2 (Cauchy-Produkt)
Zeigen Sie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

für alle $x \in (-1,1)$, indem Sie die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$ als ein Cauchy-Produkt schreiben.

Aufgabe G3 (Konvergenz von Reihen)
Welche der folgenden Aussagen implizieren die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$? Welche der Aussagen impliziert die Konvergenz? Welche sind sogar äquivalent zur Konvergenz?

(a) Die Folge $\left(n^2 a_n\right)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die Ungleichung $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$.

(c) $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall p \in \mathbb{N} \quad \left(\left|\sum_{n=n_0}^{n_0+p} a_n\right| < \varepsilon\right)$.

(d) Die Folge $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert.

(e) $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ ist eine Nullfolge.

(f) $\exists n_0 \in \mathbb{N} \exists \varepsilon > 0 \forall n \geq n_0 \quad \left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq 1-\varepsilon\right)$.

(g) Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $1 > \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1 - \frac{1}{n}$ für alle $n > n_0$.

(h) Die Folge der Partialsummen $(s_m)_{m=1}^{\infty}$, wobei $s_m := \sum_{n=1}^{m} a_n$, ist beschränkt.

(i) Die Folge der Partialsummen $(s_m)_{m=1}^{\infty}$, wobei $s_m := \sum_{n=1}^{m} a_n$, ist beschränkt und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(j) Die Folge $(b_m)_{m=1}^{\infty}$, wobei $b_m := \sum_{n=1}^{m} n\sqrt{n} a_n$, ist beschränkt.

Hausübung

Aufgabe H1 (Konvergenzkriterien/Konvergenzradien)

(a) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n^2+4n-1}, \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}n}{n^2+1}.$$

(b) Bestimmen Sie die Konvergenzradien folgender Potenzreihen.

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(5+(-1)^n)^{2n}}, \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n.$$

Untersuchen Sie bei (i) auch das Konvergenzverhalten auf dem Rand.

Aufgabe H2 (Gegenbeispiele)

(a) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

konvergiert, aber das Cauchy-Produkt der Reihe mit sich selbst nicht konvergiert.
Warum ist dies kein Widerspruch zu dem in der Vorlesung bewiesenen Satz über die Konvergenz des Cauchy-Produktes?

(b) Es sei

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ -\frac{1}{n^2}, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nicht konvergiert. Ist dies ein Widerspruch zum Leibniz-Kriterium?

Aufgabe H3 (Potenzreihen)

Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$ (dabei ist auch $r = \infty$ zugelassen).

(a) Zeigen Sie: Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|x^n$ hat ebenfalls Konvergenzradius r.

(b) Ist $\varrho \in \mathbb{R}$ mit $0 < \varrho < r$, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|\varrho^{n-1}$.

(c) Ist das auch für die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} n^p|a_n|\varrho^{n-1}$, wobei $p \in \mathbb{N}$, bzw. für $\sum_{n=1}^{\infty} n^n|a_n|\varrho^{n-1}$ richtig?